Matematika I

Ing. Jan Valášek, Ph.D.

zimní semestr 2024/2025

Matematika 1 - přednáška I

Doporučená literatura:

1. J. Neustupa: *Matematika I.* Skriptum FS ČVUT, Vydavatelství ČVUT, Praha 2013.
2. S. Kračmar, F. Mráz, J. Neustupa: *Sbírka příkladů z Matematiky I.* Skriptum FS ČVUT, Vydavatelství ČVUT, Praha 2013
3. Brožíková, Kittlerová: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*
4. oficiální web ***mat.nipax.cz***, kde jsou vzorové zkoušky, vyhlášky atd.

Tyto slidy jsou na adrese
https://users.fs.cvut.cz/jan.valasek/ pod záložkou teaching
(pozor, jedná se o kostru přednášek, doporučuji osobní účast)

Základní informace

- Je třeba sledovat web fakulty - **fs.cvut.cz**
  a občas také **mat.fs.cvut.cz** Ústavu tech. matematiky.
- Je nutné sledovat fakultní mailovou adresu.
- Kontrolujte průběžně údaje ve vašem KOSu.
- Další informace: cvičení, Moodle, seminář, zkoušky & termíny, stipendium, kredity, Repetitorium SŠ matematiky.
- Plán přednášek (1.-3. týden Lineární Algebra, 4.-8.týden Základy diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné, 9.-13.týden Základy integrálního počtu funkcí jedné proměnné, 14.týden opakování,záloha).

Předpokládáme znalost středoškolské matematiky. To se týká i **základů matematické logiky.** Jedná se zejména o pojem *výroku* a o operace s výroky:

- **negace výroku** X Označujeme ji non X nebo $\neg X$.

- **konjunkce výroků** X **a** Y Značíme ji $X \wedge Y$ a čteme ji jako
  „oba výroky X a Y platí”
  „oba výroky X a Y jsou pravdivé”
  nebo pouze krátce „X a Y”.

- **alternativa výroků** X **a** Y Značíme ji $X \vee Y$ a čteme „X nebo Y”.

- **implikace** Označujeme ji $X \implies Y$ a čteme

  „z X plyne Y"

  „platí-li X, pak platí také Y"

  „Předpokládejme, že platí X. Pak platí Y."

  „Y platí za předpokladu, že platí X"

  „X implikuje Y"

  „X je postačující podmínka pro Y"

  „Y je nutná podmínka pro X"

  atd.

- **ekvivalence** Označujeme ji $X \iff Y$ a čteme ji například:

  „X platí tehdy a jen tehdy, platí-li Y"

  „X je ekvivalentní Y"

  „X je nutná a postačující podmínka pro Y"

  „Y je nutná a postačující podmínka pro X", atd.

Výrok může být buď

pravdivý ... značíme $+$, 1, „pravda", „true", atd.

nebo

nepravdivý ... značíme $-$, 0, „nepravda", „false", atd.

Pravdivostní hodnoty všech výroků non X, $X \wedge Y, \dots, X \iff Y$ v závislosti na pravdivostních hodnotách výroků X a Y jsou patrné z následující tabulky.

Promyslete si sami význam a důvod hodnot v jednotlivých políčkách.

X	Y	non X	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \implies Y$	$X \iff Y$
$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

Často budeme používat tzv. *kvantifikátory*:

- **universální kvantifikátor** je označován symbolem $\forall$ a lze jej použít například ve spojení: $\forall\, x \in I \;:\; V(x)$ – čteme to:

  „pro každé $x \in I$ platí výrok $V(x)$"

  nebo „každé $x \in I$ má vlastnost $V(x)$"

  Konkrétní příklad:

  „Všechna auta v této ulici jsou červená."

- **existenční kvantifikátor** je značen $\exists$ a používá se například ve větách tohoto typu: $\exists\, x \in I \;:\; V(x)$ – čteme to takto:

  „existuje $x \in I$ takové, že pro ně platí výrok $V(x)$",

  „existuje $x \in I$, pro něž platí $V(x)$", apod.

  Konkrétní příklad:

  „Existuje auto v této ulici, které je červené."

  neboli „Alespoň jedno auto v této ulici je červené."

I. Lineární algebra

I.1. Vektorové prostory

Prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{E}_n$. Množinu všech uspořádaných n–tic reálných čísel označujeme $\mathbb{R}^n$.

Prvky $\mathbb{R}^n$ nazýváme *body v $\mathbb{R}^n$* nebo *n–člennými aritmetickými vektory.*

Zápis bodů v $\mathbb{R}^n$:	$[1,2]$, $[x_1,x_2]$, apod.	je-li $n=2$,
	$[2,0,5]$, $[x_1,x_2,x_3]$, apod.	je-li $n=3$,
	$[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, apod.	pro obecné n.

Přijmeme-li dohodu, že za *vzdálenost* dvou libovolných bodů $X = [\,x_1,x_2,\ldots,x_n\,]$ a $Y = [\,y_1,y_2,\ldots,y_n\,]$ v $\mathbb{R}^n$ budeme považovat číslo

$$d(X,Y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2},$$

stává se z $\mathbb{R}^n$ tzv. *n–rozměrný Euklidův prostor*, označovaný jako $\mathbb{E}_n$.

$\mathbb{E}_1$ si lze představit jako přímku, $\mathbb{E}_2$ jako rovinu, apod.

Aritmetický n–rozměrný prostor. Definujme pro libovolné dva aritmetické vektory $[\,x_1, x_2, \ldots, x_n\,]$, $[\,y_1, y_2, \ldots, y_n\,]$ jejich *součet* předpisem

$$[\,x_1, x_2, \ldots, x_n\,] \;+\; [\,y_1, y_2, \ldots, y_n\,] \;=\; [\,x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\,]$$

a pro libovolné reálné číslo λ a libovolný aritmetický vektor $[\,x_1, x_2, \ldots, x_n\,]$ jejich *součin* předpisem

$$\lambda \cdot [\,x_1, x_2, \ldots, x_n\,] \;=\; [\,\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n\,].$$

$\mathbb{R}^n$ s takto zavedenými operacemi nazýváme *aritmetickým n–rozměrným prostorem.*

Vektory v $\mathbb{E}_2$. Omezíme se na tzv. volné vektory. Každý volný vektor lze reprezentovat orientovanou úsečkou, vycházející z počátku.

Přídavné jméno "volný" dále vynecháváme.

Množinu všech vektorů v $\mathbb{E}_2$ budeme značit $\mathbf{V}(\mathbb{E}_2)$.

Vektory budeme označovat například $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, apod.

Každému vektoru můžeme jednoznačně přiřadit jeho *souřadnice.* Souřadnice vektorů zapisujeme v kulatých závorkách, např. $\mathbf{u} = (-2, 1)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, apod.

Pro $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ z $\mathbf{V}(\mathbb{E}_2)$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ definujeme:

součet vektorů $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$*:* $\quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2),$

násobek vektoru $\mathbf{u}$ *a čísla* λ*:* $\quad \lambda \cdot \mathbf{u} = (\lambda u_1,\ \lambda u_2).$

Snadno ověříme, že:

(a) Pro libovolné vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{E}_2)$ a libovolné reálné číslo λ patří součet $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ i součin $\lambda \cdot \mathbf{u}$ opět do $\mathbf{V}(\mathbb{E}_2)$. Této vlastnosti se říká „uzavřenost $\mathbf{V}(\mathbb{E}_2)$ vůči oběma operacím" (tj. vůči „sčítání vektorů" a vůči „násobení vektorů reálnými čísly").

(b) Pro libovolné vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{V}(\mathbb{E}_2)$ a libovolná reálná čísla α, β platí:

(b1) $\quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u},$

(b2) $\quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}),$

(b3) $\quad 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u},$

(b4) $\quad \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{u},$

(b5) $\quad \alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v},$

(b6) $\quad (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u}.$

(c) Existuje tzv. *nulový vektor* $\mathbf{o} = (0,0)$ s tou vlastností, že pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(\mathbb{E}_2)$ platí
$$\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}.$$

(d) Ke každému vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(\mathbb{E}_2)$ existuje vektor $-\mathbf{u} \in \mathbf{V}(\mathbb{E}_2)$ (tzv. *opačný vektor* k vektoru $\mathbf{u}$) tak, že platí
$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}.$$

Analogicky lze definovat i $\mathbf{V}(\mathbb{E}_3)$ a operace sčítání vektorů a násobení vektorů reálnými čísly v $\mathbf{V}(\mathbb{E}_3)$. Tyto operace mají i ve $\mathbf{V}(\mathbb{E}_3)$ vlastnosti (a) – (d).

Neprázdné množiny, ve kterých jsou definovány operace sčítání prvků a násobení prvků reálnými čísly (s vlastnostmi (a) – (d)), se v matematice vyskytují velmi často.

Definice (vektorový prostor). Každou neprázdnou množinu, ve které jsou definovány operace sčítání prvků a násobení prvků reálnými čísly s vlastnostmi (a) – (d), nazýváme *vektorovým prostorem.*

Příklady. $\mathbf{V}(\mathbb{E}_2)$, $\mathbf{V}(\mathbb{E}_3)$, a další – viz TABULE $\boxed{\text{T1.1}}$

Dále se budeme zabývat obecným vektorovým prostorem $\mathbf{V}$.

Prvky $\mathbf{V}$ budeme nazývat vektory a budeme je značit stejně jako prvky $\mathbf{V}(\mathbb{E}_2)$, tj. malými tučnými písmeny. Nulový vektor bude opět značen $\mathbf{o}$. (Na tabuli ale píšeme $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{o}$, apod.)

Věta (o jednoznačnosti nulového prvku). *Ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ existuje jediný nulový prvek.*

Důkaz: viz TABULE $\boxed{\text{T1.2}}$

Věta (o jednoznačnosti opačného prvku). *Opačný vektor $(-\mathbf{u})$ k libovolnému vektoru $\mathbf{u}$ ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ je určen jednoznačně.*

Důkaz: viz TABULE $\boxed{\text{T1.3}}$

Poznámka. Připomeňme, že nulový prvek $\mathbf{o}$ má tu vlastnost, že pro každé $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ platí $\mathbf{u}+\mathbf{o} = \mathbf{u}$. Následující lemma říká, že pro jakékoliv vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ rovnost $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{u}$ nemůže platit v jiném případě, než že $\mathbf{v} = \mathbf{o}$:

Lemma. *Nechť pro vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *ve vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$ *platí* $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{u}$. *Pak* $\mathbf{v}=\mathbf{o}$.

Důkaz: viz TABULE $\boxed{\text{T1.4}}$

Věta. *Je-li* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor,* $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$ *a* α *je reálné číslo, pak*

$$1)\quad 0\cdot\mathbf{u}=\mathbf{o},\qquad\qquad 2)\quad (-1)\cdot\mathbf{u}=-\mathbf{u},\qquad\qquad 3)\quad \alpha\cdot\mathbf{o}=\mathbf{o}.$$

Důkaz: 1) Platí: $\mathbf{u}+0\cdot\mathbf{u}=1\cdot\mathbf{u}+0\cdot\mathbf{u}=(1+0)\cdot\mathbf{u}=1\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}$. Z rovnosti $\mathbf{u}+0\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}$ a z výše uvedeného lemmatu vidíme, že $0\cdot\mathbf{u}=\mathbf{o}$.

2) Platí: $\mathbf{u}+(-1)\cdot\mathbf{u}=1\cdot\mathbf{u}+(-1)\cdot\mathbf{u}=[1+(-1)]\cdot\mathbf{u}=0\cdot\mathbf{u}=\mathbf{o}$. Odtud vidíme, že $(-1)\cdot\mathbf{u}$ je opačným vektorem k $\mathbf{u}$.

3) Platí: $\alpha\cdot\mathbf{o}=\alpha\cdot(0\cdot\mathbf{u})=(\alpha\cdot 0)\cdot\mathbf{u}=0\cdot\mathbf{u}=\mathbf{o}$.

Definice (lineární kombinace). Je-li $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ skupina vektorů ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou reálná čísla, pak vektor

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{u}_n \qquad \text{(který je rovněž vektorem ve } \mathbf{V}\text{)}$$

nazýváme *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Příklady: viz TABULE $\boxed{\text{T1.5}}$

Definice (lineární závislost a nezávislost vektorů). Skupinu vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ nazýváme *lineárně závislou* (krátce píšeme LZ), jestliže existují reálná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (z nichž alespoň jedno je různé od nuly) tak, že

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{o}.$$

Skupinu vektorů, která není lineárně závislá, nazýváme *lineárně nezávislou* (krátce píšeme LN).

Důležitá otázka: Jak poznat, je-li daná konkrétní skupina vektorů LZ nebo LN?

Věta. *Je-li jedním ze skupiny vektorů* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ *z vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *nulový vektor, pak tato skupina je LZ.*

Důkaz: viz TABULE $\boxed{\text{T1.6}}$

Obecněji platí:

Věta. *Skupina vektorů* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ *(kde* $n > 1$*) z vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *je LZ právě tehdy, je-li možné alespoň jeden z vektorů této skupiny vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů skupiny.*

Princip důkazu: viz TABULE $\boxed{\text{T1.7}}$

Důsledek. *Obsahuje-li skupina vektorů* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ *z vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *alespoň dva stejné vektory, pak tato skupina je LZ.*