Matematika I – přednáška 10

Shrnutí co bylo minule

Funkce, limita funkce.

Co bude dnes

Spojitost reálných funkcí jedné reálné proměnné.

Tyto slidy najdete na adrese
https://users.fs.cvut.cz/jan.valasek
(pro osobní potřeby a nenahrazuje skripta ani přednášku).

Definice (limita funkce). Předpokládejme, že $x_0 \in R^*$ a že definiční obor funkce f obsahuje některé prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0. Platí-li pro každdou posloupnost $\{x_n\}$ v $P(x_0)$ implikace

$$\lim x_n = x_0 \implies \lim f(x_n) = a ,$$

pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 limitu rovnou a. Píšeme: $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

Poznámka. Skutečnost, že $\lim x_n = x_0$, se někdy také zkráceně zapisuje: $x_n \to x_0$. Podobně, místo $\lim f(x_n) = a$ můžeme krátce psát: $f(x_n) \to a$. Užijeme-li toto značení, můžeme implikaci v definici limty funkce psát takto:

$$x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to a.$$

Při výpočtu hodnot konkrétních limit je důležitá tato věta:

Věta (o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí). *Nechť* $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ *a* $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$. *Pak platí:*

a) $\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = a + b$,

b) $\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = a - b$,

c) $\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$,

d) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$,

pokud výrazy na pravých stranách mají smysl.

Velmi užitečné jsou také následující věty o limitách složených funkcí:

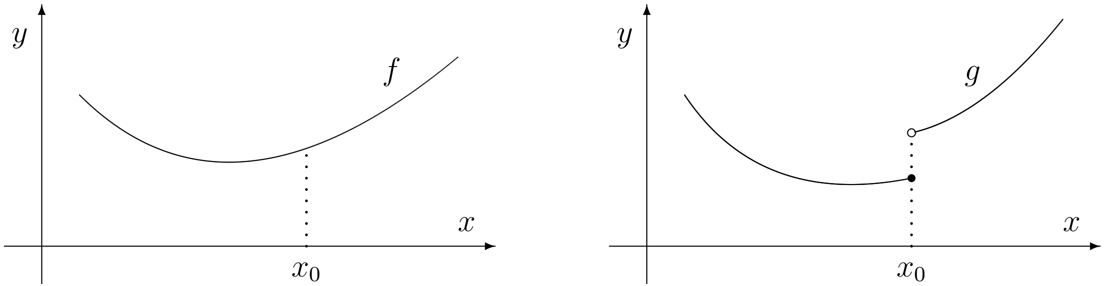
Věta (1. věta o limitě složené funkce). Nechť $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda$, $\lambda \in R$ a nechť funkce f je spojitá v bodě λ. Pak platí: $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lambda)$.

Věta (2. věta o limitě složené funkce). Nechť $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ (respektive $-\infty$). Nechť $\lim_{y \to \infty} f(y) = L$ (respektive $\lim_{y \to -\infty} f(y) = L$). Pak platí: $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L$.

Matematika I – přednáška 10

II.4. Spojitost funkce

Motivace. Jaký je rozdíl mezi funkcemi f a g?



Definice. O funkci f říkáme, že je *spojitá v bodě* $x_0 \in D(f)$, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Poznámka. Aby funkce f mohla být spojitá v bodě x_0, musí být definovaná v nějakém okolí bodu x_0.

Definice. O funkci f říkáme, že je *spojitá zprava v bodě* $x_0 \in D(f)$, jestliže

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$$

Analogicky definujeme funkci *spojitou zleva v bodě* x_0.

Poznámka. Z uvedených definic snadno plyne toto tvrzení: *Funkce* f *je spojitá v bodě* x_0 *právě tehdy, je-li v tomto bodě spojitá zprava i zleva.*

Definice. Nechť I je interval v $\mathbb{R}$ s krajními body a a b, $a < b$. Říkáme, že funkce f je *spojitá v intervalu* I, jestliže

a) f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$,

b) f je spojitá zprava v bodě a (pokud $a \in I$),

c) f je spojitá zleva v bodě b (pokud $b \in I$).

Další obrázky a příklady: viz TABULE

Definice (extrémy funkce). Říkáme, že funkce f nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého *maxima,* jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(x) \leq f(x_0)$. Píšeme $f(x_0) = \max f$.

Říkáme, že funkce f nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého *minima,* jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(x) \geq f(x_0)$. Píšeme $f(x_0) = \min f$.

Maximum a minimum funkce f nazýváme souhrně *extrémy* funkce f.

Definice (Supremum a infimum funkce). Supremum množiny hodnot funkce f $(H(f))$ nazýváme *supremem funkce f*. Píšeme $\sup f$.

Infimum množiny hodnot funkce f $(H(f))$ nazýváme *infimem funkce f*. Píšeme $\inf f$.

Pozn. Supremum množiny hodnot funkce f na množině M $(H(f|_M))$ nazýváme supremem funkce f na množině M. Píšeme $\sup_{\mathrm{M}} f$.
Analogicky infimum funkce f na množině M.

Věta. *Polynomy, goniometrické funkce, cyklometrické funkce, mocninná funkce, exponenciální funkce a logaritmická funkce jsou spojité v každém intervalu, který je částí jejich definičního oboru.*

Věta (o spojitosti součtu, rozdílu, atd. v bodě x_0). *Jsou-li funkce f a g spojité v bodě x_0, pak též funkce $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ a $|f|$ jsou spojité v bodě x_0. Je-li navíc $g(x_0)\neq 0$, je i funkce f/g spojitá v bodě x_0.*

Poznámka. Věta platí i tehdy, když „spojitost v bodě x_0" nahradíme „spojitostí zprava v bodě x_0", případně „spojitostí zleva v bodě x_0". V důsledku toho věta platí i tehdy, nahradíme-li „spojitost v bodě x_0" „spojitostí v intervalu I". (V tomto případě je třeba v poslední části věty předpokládat, že $g(x)\neq 0$ pro všechna $x\in I$.)

Věta. *Polynomy, goniometrické funkce, cyklometrické funkce, mocninná funkce, exponenciální funkce a logaritmická funkce jsou spojité v každém intervalu, který je částí jejich definičního oboru.*

Věta (o spojitosti součtu, rozdílu, atd. v bodě x_0). *Jsou-li funkce f a g spojité v bodě x_0, pak též funkce $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ a $|f|$ jsou spojité v bodě x_0. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, je i funkce f/g spojitá v bodě x_0.*

Věta. *Polynomy, goniometrické funkce, cyklometrické funkce, mocninná funkce, exponenciální funkce a logaritmická funkce jsou spojité v každém intervalu, který je částí jejich definičního oboru.*

Věta (o spojitosti součtu, rozdílu, atd. v bodě x_0). *Jsou-li funkce f a g spojité v bodě x_0, pak též funkce $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ a $|f|$ jsou spojité v bodě x_0. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, je i funkce f/g spojitá v bodě x_0.*

Věta (o spojitosti složené funkce v bodě x_0). *Je-li funkce g spojitá v bodě x_0 a funkce f spojitá v bodě $g(x_0)$, pak složená funkce $f * g$ (tj. funkce $y = f(g(x))$) je spojitá v bodě x_0.*

Obdobné tvrzení lze dokázat i ohledně spojitosti složené funkce v intervalu:
Je-li funkce g spojitá v intervalu I, funkce f je spojitá v intervalu J a je-li $g(I) \subset J$, pak rovněž složená funkce $f * g$ je spojitá v intervalu I.

Věta (o spojitosti složené funkce v bodě x_0). *Je-li funkce g spojitá v bodě x_0 a funkce f spojitá v bodě $g(x_0)$, pak složená funkce $f * g$ (tj. funkce $y = f(g(x))$) je spojitá v bodě x_0.*

Obdobné tvrzení lze dokázat i ohledně spojitosti složené funkce v intervalu:
Je-li funkce g spojitá v intervalu I, funkce f je spojitá v intervalu J a je-li $g(I) \subset J$, pak rovněž složená funkce $f * g$ je spojitá v intervalu I.

Některé důležité vlastnosti spojitých funkcí:

Věta (o nabývání mezihodnot). *Je-li funkce f spojitá v intervalu I a jsou-li x_1 a x_2 dva libovolné body z I, pak ke každému číslu η ležícímu mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$ existuje bod ξ ležící mezi x_1 a x_2 takový, že $f(\xi) = \eta$.*

Věta (o spojitosti inverzní funkce). *Je-li funkce* f *spojitá a prostá v intervalu* I, $f(I) = J$, *pak inverzní funkce* f_{-1} *je spojitá v intervalu* J.

Věta (o spojitosti inverzní funkce). *Je-li funkce f spojitá a prostá v intervalu I, $f(I) = J$, pak inverzní funkce f_{-1} je spojitá v intervalu J.*

Věta (o existenci maxima a minima). *Nechť funkce f je spojitá v uzavřeném a omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak extrémy $\max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ a $\min\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ existují.*