Matematika I – přednáška 11

Shrnutí co bylo minule

Spojitost reálných funkcí jedné reálné proměnné.

Co bude dnes

Derivace funkce.

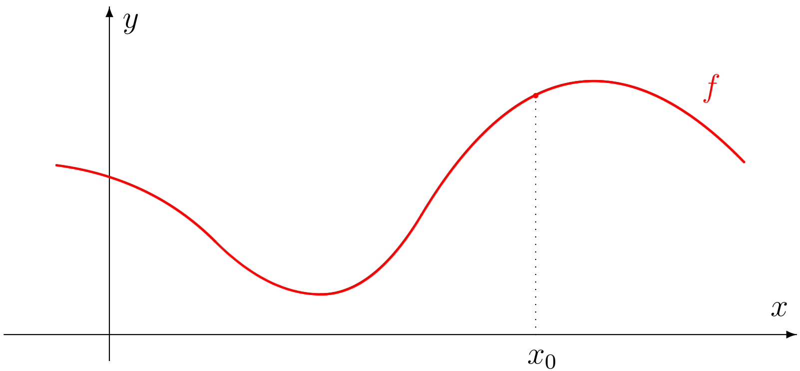
Tyto slidy jsou na adrese
https://users.fs.cvut.cz/jan.valasek
(pro osobní potřeby, nenahrazuje přednášku ani skripta).

Matematika I – přednáška 11

II.5. Derivace funkce

(nejdůležitější pojem celého diferenciálního počtu)

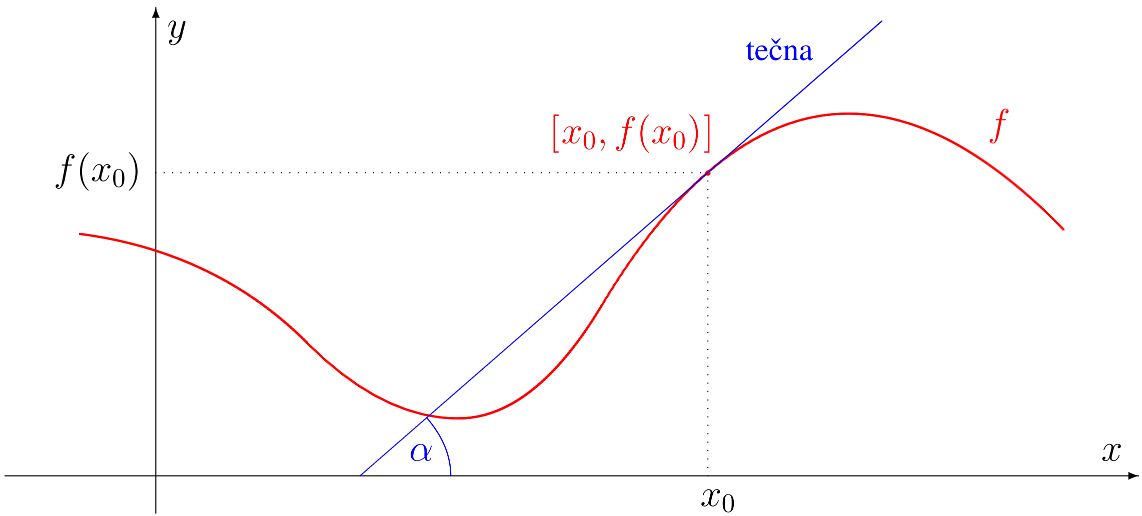
Motivace: Jak charakterizovat růst nebo pokles funkce f v libovolném bodě x_0 ?



Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), Sir Isaac Newton (1642–1727) a další:

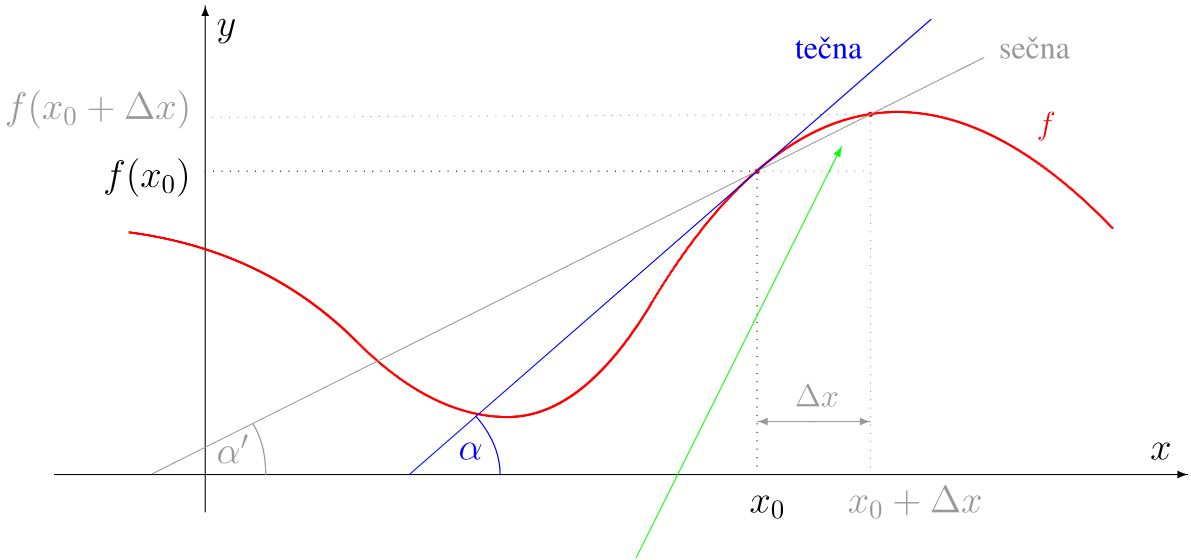
Charakterizujme růst nebo pokles funkce f v bodě x_0 směrnicí tečny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[x_0, f(x_0)]$.

Připomínáme: směrnice tečny je tangens úhlu, který tečna svírá s kladnou částí osy x.



Otázka: Jak vyjádřit směrnici tečny (tj. tangens úhlu α)?

Odpověď: Uvažujme sečnu, protínající graf funkce f v bodech $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)]$.



V tomto malém pravoúhlém trojúhelníku platí: $\quad \operatorname{tg} \alpha' = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Hodnotu $\operatorname{tg} \alpha$ získáme, uvažujeme-li limitu pro $\Delta x \to 0$.
(V tomto případě sečna přechází v tečnu a úhel α' přechází v α.)

Hodnotu $\operatorname{tg}\alpha$ nazýváme *derivací* funkce f v bodě x_0. Přesná definice zní:

Definice. *Derivací funkce f v bodě x_0* nazýváme číslo, které označujeme $f'(x_0)$ a které definujeme rovnicí

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

pokud limita vpravo existuje a je konečná.

Poznámka. K pojmu derivace lze kromě geometrické úvahy o směrnici tečny ke grafu funkce dospět i řadou fyzikálních úvah. Například:

Předpokládejme, že po přímce se pohybuje bod. Dráha, kterou bod urazil v čase t, je $s(t)$. Průměrná rychlost pohybu v časovém intervalu $\langle t_0, t + \Delta t\rangle$ je

$$\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Okamžitou rychlostí pohybujícího se bodu v čase t_0 nazveme limitu tohoto zlomku pro $\Delta t \to 0$ (pokud limita existuje a je konečná), neboli derivaci $s'(t_0)$.

Tečna ke grafu funkce – analytické vyjádření. Má-li funkce f' derivaci (x_0) v bodě x_0, pak *tečnou* ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ (kde $y_0 = f(x_0)$), je přímka daná rovnicí

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Normála ke grafu funkce

Tečna ke grafu funkce – analytické vyjádření. Má-li funkce f derivaci $f'(x_0)$ v bodě x_0, pak *tečnou* ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ (kde $y_0 = f(x_0)$), je přímka daná rovnicí

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Definice (derivace zleva a zprava). Existuje-li vlastní jednostranná limita

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad \left(\text{respektive} \quad \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right),$$

pak hodnotu této limity nazýváme *derivací funkce f zleva* (případně *zprava*) v bodě x_0 a označujeme ji $f'_-(x_0)$ (případně $f'_+(x_0)$).

Definice (derivace jakožto funkce). Funkci, která každému bodu $x \in D(f)$ přiřazuje derivaci $f'(x)$ (pokud v bodě x derivace existuje), nazýváme *derivací funkce f* a označujeme ji f'. Pro definiční obor funkce f' platí: $D(f') \subset D(f)$.

Jiná značení derivace: $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f, \quad y', \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$ atd.

Věta. *Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je v bodě x_0 spojitá.*

Důkaz: viz TABULE

Stejná tvrzení platí, přidáme-li k výroku o derivaci i o spojitosti slovo „zprava" (případně „zleva"):

Má-li funkce f derivaci zprava v bodě x_0, je v tomto bodě spojitá zprava.

Má-li funkce f derivaci zleva v bodě x_0, je v tomto bodě spojitá zleva.

Důsledek. *Nechť I je interval s krajními body a, b (kde $a < b$). Má-li funkce f derivaci ve všech bodech $x \in (a, b)$, derivaci zprava v bodě a (pokud $a \in I$) a derivaci zleva v bodě b (pokud $b \in I$), pak funkce f je spojitá v intervalu I.*

Počítat derivaci konkrétní funkce (dané nějakým konkrétním vzorcem) podle definice by bylo velmi zdlouhavé a těžkopádné. Následující věty a vzorce umožní rychlý výpočet derivací různých funkcí.

Věta. *Nechť funkce u a v mají derivace v bodě x a nechť $k \in \mathbb{R}$. Pak také funkce ku, $u+v$, $u-v$ a $u \cdot v$ mají derivace v bodě x a platí:*

1) $[ku]'(x) = k\,u'(x)$,
2) $[u+v]'(x) = u'(x) + v'(x)$,
3) $[u-v]'(x) = u'(x) - v'(x)$,
4) $[u \cdot v]'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

Je-li navíc $v(x) \neq 0$, má i podíl u/v derivaci v bodě x a platí:

5) $$\left[\frac{u}{v}\right]'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

Vzorce se lépe pamatují v jednodušším tvaru:

1) $(ku)' = k\,u'$
2) $(u+v)' = u' + v'$
3) $(u-v)' = u' - v'$
4) $(uv)' = u'v + uv'$
5) $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Naučte se je nazpaměť !

Příklady odvození:

TABULE

Derivace některých elementárních funkcí:

a) $(k)' = 0$ (k je konstantní funkce)

b) $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$

c) $(\sin x)' = \cos x$

d) $(\cos x)' = -\sin x$

e) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

f) $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

g) $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

Každý z výše uvedených vzorců platí pro ta x, pro která má pravá strana smysl.

Příklady odvození (včetně vzorce pro $(\mathrm{e}^x)'$): viz TABULE

Příklady užití: viz TABULE

Příklad: Ve kterém z bodů $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ funkce $y = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 4$ nejstrměji roste, případně klesá? Napište rovnici tečny a normály ke grafu této funkce v bodě x_3.

Řešení: viz TABULE

Věta (o derivaci složené funkce). *Ve všech bodech x takových, že $g'(x)$ existuje a $f'(g(x))$ existuje, má složená funkce $f(g(x))$ derivaci:*

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Příklady: viz TABULE

Zobecnění: $[\,f(g(h(x)))\,]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Vzorce se uvádějí i v jiných tvarech: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f * g) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\,\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x},$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f * g * h) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$$