

Matematika I – přednáška 15

Shrnutí co bylo minule

Vyšetření lokálních a globálních extrémů..

Co bude dnes

Asymptoty, průběh funkce, oskulační kružnice.

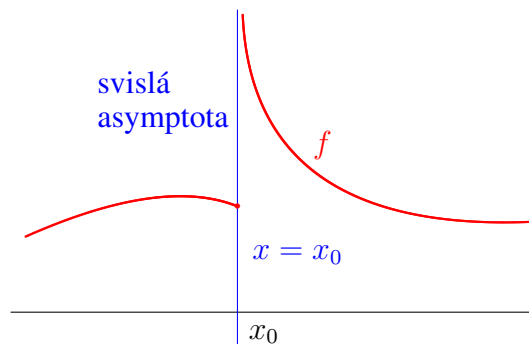
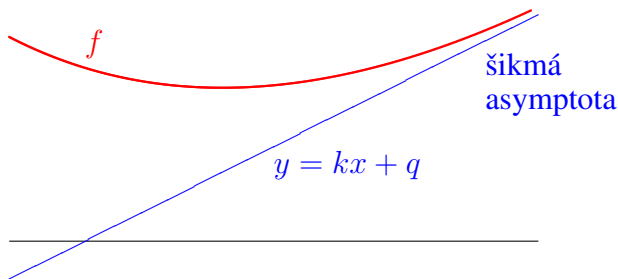
Tyto slidy jsou na adrese

<https://users.fs.cvut.cz/jan.valasek>
(pro osobní potřeby, nenahrazuje přednášku ani skripta).

Matematika I – přednáška 15

Asymptoty grafu funkce

Motivace: Na následujících obrázcích vidíte přímky, ke kterým se graf funkce „přimyká“ pro $x \rightarrow \infty$ (šikmá přímka) nebo pro $x \rightarrow x_0-$ (svislá přímka).



Definice (šikmá asymptota). Přímku $y = kx + q$ nazýváme *šikmou asymptotou* grafu funkce f *pro* $x \rightarrow \infty$, jestliže $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - q] = 0$.

Podobně, přímku $y = kx + q$ nazýváme *šikmou asymptotou* grafu funkce f *pro* $x \rightarrow -\infty$, jestliže $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx - q] = 0$.

Věta (nutné a postačující podmínky pro šikmou asymptotu). *Přímka $y = kx + q$ je šikmou asymptotou grafu funkce f pro $x \rightarrow \infty$ právě když*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad a \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = q.$$

Princip důkazu: viz TABULE

Vyšetření šikmé asymptoty pro $x \rightarrow \infty$:

Vypočítáme uvedené limity. Pokud obě existují a jejich hodnoty k a q jsou konečné, pak přímka $y = kx + q$ je šikmou asymptotou funkce f pro $x \rightarrow \infty$. Jestliže některá z obou limit neexistuje nebo je nekonečná, šikmá asymptota funkce f pro $x \rightarrow \infty$ neexistuje.

Poznámka. Větu lze stejně použít i k vyšetření šikmé asymptoty pro $x \rightarrow -\infty$. Stačí pouze všude zaměnit ∞ za $-\infty$.

Příklad: viz TABULE

Definice (svislá asymptota). Přímku $x = x_0$ nazýváme *svislou asymptotou* grafu funkce f v bodě x_0 , jestliže alespoň jedna jednostranná limita funkce f v bodě x_0 je nevlastní (tj. nekonečná).

Vyšetření svislé asymptoty pro $x \rightarrow x_0$ zprava nebo zleva:

Pokud v jakémkoliv konečném bodě x_0 vychází

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty,$$

pak přímka $x = x_0$ je svislou asymptotou funkce f .

Příklad: viz TABULE

I. Co lze přímo získat z analytického vyjádření funkce f :

- Určíme definiční obor f (není-li již zadán).
- Zjistíme, zda funkce f je sudá, lichá, periodická.
- Určíme, kde je funkce f spojitá a vypočítáme jednostranné limity v krajních bodech intervalů které tvoří definiční obor f , případně též v bodech nespojitosti.
- Stanovíme průsečíky grafu f s osami souřadného systému a najdeme intervaly, v nichž je funkce kladná, respektive záporná.

II. Co lze získat z první derivace funkce f :

- Vypočítáme f' (nezapomeneme na definiční obor f').
- Pomocí znaménka f' najdeme maximální intervaly, ve kterých je funkce f rostoucí nebo klesající.
- Najdeme lokální extrémy funkce f .

III. Co lze získat ze druhé derivace funkce f :

- Vypočítáme f'' (nezapomeneme na definiční obor f'').
- Pomocí znaménka f'' najdeme maximální intervaly, v nichž je f konvexní nebo konkávní.
- Najdeme inflexní body funkce f .

IV. Na závěr:

- Najdeme a načrtneme asymptoty grafu funkce f .
- Načrtneme graf funkce f .

Příklad. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x^{2/3} - x$.

Řešení:

- I. • $f(x) = (x^{1/3})^2 - x \dots D(f) = (-\infty, \infty)$
- Funkce f není sudá, ani lichá, ani periodická.
 - Funkce f je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$, protože a) $(x^{1/3})^2$ je spojitá funkce v $(-\infty, \infty)$ (jakožto složená funkce, přičemž vnitřní funkce $x^{1/3}$ je spojitá v $(-\infty, \infty)$ a vnější funkce druhá mocnina je rovněž spojitá funkce v $(-\infty, \infty)$) a b) $-x$ je také spojitá funkce v $(-\infty, \infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^{2/3} - x] = \infty - (-\infty) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} [x^{2/3} - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{2/3} [1 - x^{1/3}] = \infty \cdot [1 - \infty] = -\infty.$$

- **Průsečík grafu f s osou x :** řešíme rovnici $x^{2/3} - x = 0 \dots x^{2/3} [1 - x^{1/3}] = 0 \dots$
 $x_1 = 0, x_2 = 1$. Dosazením do $f(x)$ ověříme, že odpovídající funkční hodnoty jsou
 $y_1 = 0, y_2 = 0$.

Průsečík grafu f s osou y : $x = 0$, dopočítáme $y = 0$.

Kde je funkce f kladná: ... řešíme nerovnici $x^{2/3} - x > 0 \dots x^{2/3} [1 - x^{1/3}] > 0$
... $x \neq 0$ a $1 - x^{1/3} > 0 \dots x \neq 0$ a $\sqrt[3]{x} < 1 \dots x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$

Kde je funkce f záporná: ... řešíme nerovnici $x^{2/3} - x < 0 \dots x^{2/3} [1 - x^{1/3}] < 0$
... $x \neq 0$ a $1 - x^{1/3} < 0 \dots x \neq 0$ a $\sqrt[3]{x} > 1 \dots x \in (1, \infty)$

II. • $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} - 1$ pro $x \neq 0$. Tudíž: $D(f') = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

• Kde je funkce f rostoucí: v $D(f')$ řešíme nerovnici $\frac{2}{3}x^{-1/3} - 1 > 0 \dots \frac{2}{3}x^{-1/3} > 1$
... a) $x > 0$ a $\frac{2}{3} > x^{1/3}$ nebo b) $x < 0$ a $\frac{2}{3} < x^{1/3} \dots x \in (0, \frac{8}{27})$ (z možnosti a)).
Jelikož funkce f je spojitá na $\langle 0, \frac{8}{27} \rangle$, dospíváme k závěru: **f je rostoucí v $\langle 0, \frac{8}{27} \rangle$.**

Kde je funkce f klesající: v $D(f')$ řešíme nerovnici $\frac{2}{3}x^{-1/3} - 1 < 0 \dots \frac{2}{3}x^{-1/3} < 1$
... a) $x > 0$ a $\frac{2}{3} < x^{1/3}$ nebo b) $x < 0$ a $\frac{2}{3} > x^{1/3} \dots x \in (\frac{8}{27}, \infty)$ (z možnosti a))
a) a $x \in (-\infty, 0)$ (z možnosti b)). Jelikož funkce f je spojitá na $\langle \frac{8}{27}, \infty \rangle$ i na $(-\infty, 0)$, dospíváme k závěru: **f je klesající v intervalech $(-\infty, 0)$ a $\langle \frac{8}{27}, \infty \rangle$ (tj. v každém z nich).**

- **Lokální extrémů funkce f :** „podezřelé body“ jsou $x_3 = 0$ (zde derivace neexistuje) a $x_4 = \frac{8}{27}$ (zde je derivace = 0).

O bodu $x_3 = 0$ lze říci: f je klesající v $(-\infty, 0)$ a rostoucí v $(0, \frac{8}{27})$. **V bodě $x_3 = 0$ má tudíž funkce f ostré lokální minimum $f(x_3) = f(0) = 0$.**

O bodu $x_4 = \frac{8}{27}$ lze říci: f je rostoucí v $(0, \frac{8}{27})$ a klesající v $(\frac{8}{27}, \infty)$. **V bodě $x_4 = \frac{8}{27}$ má tudíž funkce f ostré lokální maximum $f(x_4) = f(\frac{8}{27}) = \frac{4}{27}$.**

III. • $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-4/3}$ pro $x \neq 0$. Tudíž: $D(f'') = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

- **Kde je funkce f ryze konvexní:** v $D(f'')$ řešíme nerovnici $-\frac{2}{9}x^{-4/3} > 0 \dots$
 $x^{-4/3} < 0 \dots$ neplatí pro žádná $x \in D(f'')$.

Kde je funkce f ryze konkávní: v $D(f'')$ řešíme nerovnici $-\frac{2}{9}x^{-4/3} < 0 \dots$
 $x^{-4/3} > 0 \dots$ platí pro všechna $x \in D(f'')$, tj. $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$. Jelikož funkce f je spojitá v $(-\infty, 0)$ i v $(0, \infty)$, dospíváme k závěru: **f je ryze konkávní v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$** (tj. v každém z nich).

- Jelikož $D(f') = D(f'') = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, tak inflexním bodem může být jedině bod $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, kde $f''(x) = 0$. Žádný takový bod však neexistuje. **Funkce f tudíž nemá žádný inflexní bod.**

IV. Vyšetření šikmé asymptoty grafu funkce f pro $x \rightarrow \infty$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2/3} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x^{1/3}} - 1 \right] = -1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} [x^{2/3} - x + x] = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{2/3} = \infty.$$

Šikmá asymptota pro $x \rightarrow \infty$ tudíž neexistuje.

Vyšetření šikmé asymptoty grafu funkce f pro $x \rightarrow -\infty$:

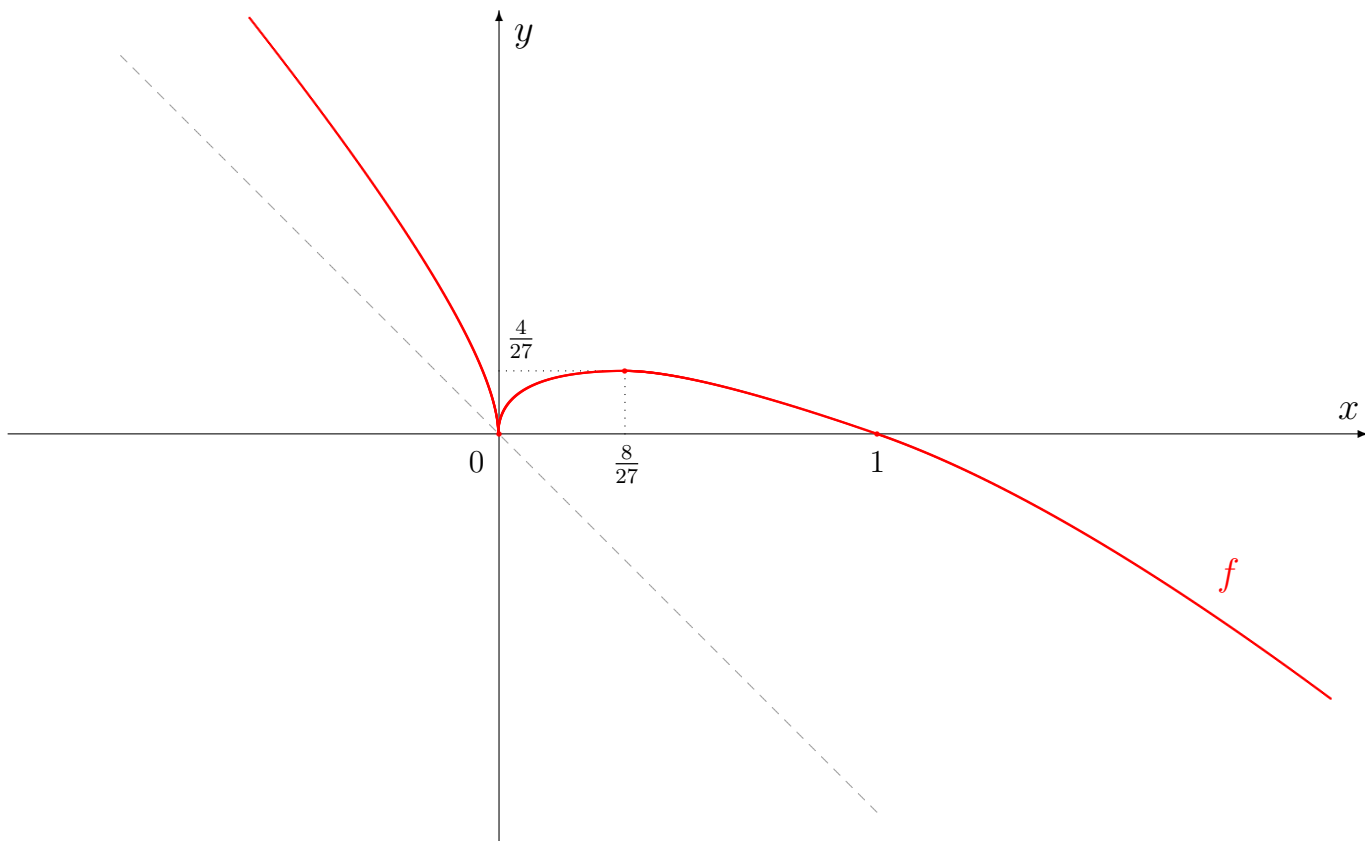
$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{2/3} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x^{1/3}} - 1 \right] = -1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^{2/3} - x + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2/3} = \infty.$$

Šikmá asymptota pro $x \rightarrow -\infty$ tudíž také neexistuje.

Vyšetření svislé asymptoty grafu funkce f : V žádném bodě $x_0 \in (-\infty, \infty)$ neplatí

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$. Graf funkce f proto nemá žádnou svislou asymptotu.



Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = e^{-x^2}$.

Řešení:

I. • $f(x) = \exp(-x^2) \dots D(f) = (-\infty, \infty)$

• Funkce f je sudá, není periodická.

• Funkce f je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$, protože vnější funkce \exp je spojitá v $(-\infty, \infty)$ a vnitřní funkce $(-x^2)$ je také spojitá v $(-\infty, \infty)$.

limity v krajních bodech $D(f)$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0$.

• Průsečík grafu f s osou x : rovnice $e^{-x^2} = 0$ nemá žádné řešení v \mathbb{R} , graf f tudíž neprotíná osu x .

Průsečík grafu f s osou y : $x = 0$, dopočítáme $y = 1$.

Funkce f je kladná v celém $D(f)$, protože vnější funkce \exp nabývá pouze kladných hodnot.

II. • $f'(x) = e^{-x^2}(-2x)$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.

• Kde je funkce f rostoucí: řešíme nerovnici $e^{-x^2}(-2x) > 0 \dots x \in (-\infty, 0)$.
Jelikož f je spojitá až do bodu 0, dospíváme k závěru: f je rostoucí v $(-\infty, 0)$.

Kde je funkce f klesající: řešíme nerovnici $e^{-x^2}(-2x) < 0 \dots x \in (0, \infty)$.
Jelikož f je spojitá až do bodu 0, dospíváme k závěru: f je klesající v $\langle 0, \infty \rangle$.

• Lokální extrémů funkce f : jediným „podezřelým bodem“ je $x_0 = 0$, kde derivace = 0. O bodu $x_0 = 0$ lze říci: f je rostoucí v $(-\infty, 0)$ a klesající v $\langle 0, \infty \rangle$. **V bodě $x_0 = 0$ má tudíž funkce f ostré lokální maximum $f(x_0) = e^0 = 1$.**

III. • $f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.

• Kde je funkce f ryze konvexní: řešíme nerovnici $e^{-x^2}(4x^2 - 2) > 0 \dots 4x^2 > 2 \dots x \in (-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, \infty)$. Jelikož funkce f je spojitá až do krajních bodů $-\sqrt{2}/2$ a $\sqrt{2}/2$, dostáváme tvrzení: **funkce f je ryze konvexní na intervalu $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$ a na intervalu $\langle \sqrt{2}/2, \infty \rangle$.**

Kde je funkce f ryze konkávní: řešíme nerovnici $e^{-x^2}(4x^2 - 2) < 0 \dots 4x^2 < 2 \dots x \in (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Jelikož funkce f je spojitá až do krajních bodů $-\sqrt{2}/2$ a $\sqrt{2}/2$, dostáváme tvrzení: **funkce f je ryze konkávní na intervalu $\langle -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \rangle$.**

- **Inflexní body:** řešíme rovnici $e^{-x^2} (4x^2 - 2) = 0 \dots x_1 = -\sqrt{2}/2, x_2 = \sqrt{2}/2$.

O bodu $x_1 = -\sqrt{2}/2$ lze říci: f je ryze konvexní v levém okolí x_1 (konkrétně v $(-\infty, x_1)$) a ryze konkávní v pravém okolí x_1 (konkrétně v $\langle x_1, x_2 \rangle$). Proto x_1 je inflexním bodem.

O bodu $x_2 = \sqrt{2}/2$ lze říci: f je ryze konkávní v levém okolí x_2 (konkrétně v (x_1, x_2)) a ryze konvexní v pravém okolí x_2 (konkrétně v $\langle x_2, \infty \rangle$). Proto x_2 je inflexním bodem.

IV. Vyšetření šikmé asymptoty grafu funkce f pro $x \rightarrow \infty$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \frac{0}{\infty} = 0, \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0.$$

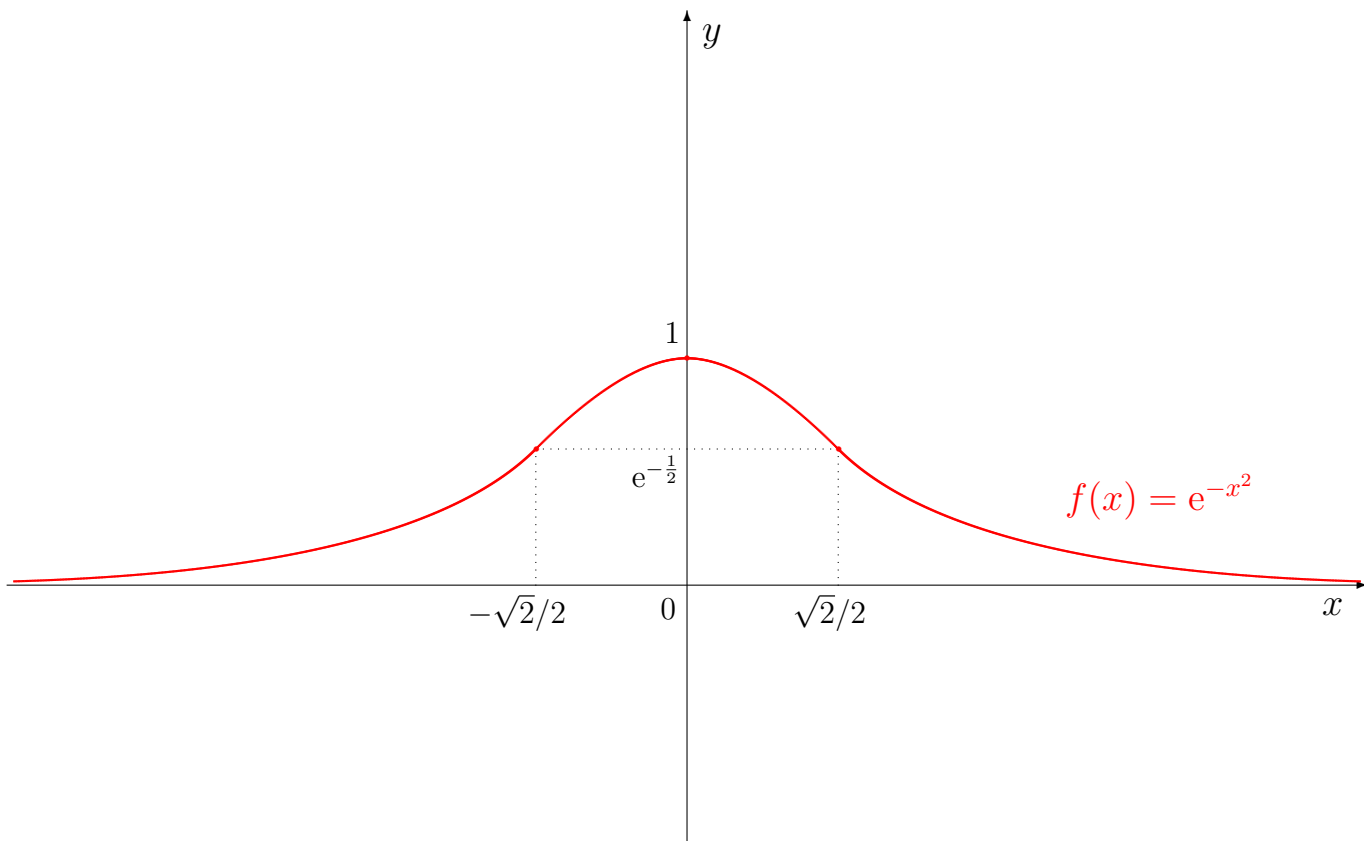
Šikmou asymptotou pro $x \rightarrow \infty$ je tudíž přímka $y = 0$ (= osa x).

Podobně zjistíme:

Šikmou asymptotou pro $x \rightarrow -\infty$ je také přímka $y = 0$ (= osa x).

Vyšetření svislé asymptoty grafu funkce f : V žádném bodě $x_0 \in (-\infty, \infty)$ neplatí

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$. **Graf funkce f proto nemá žádnou svislou asymptotu.**



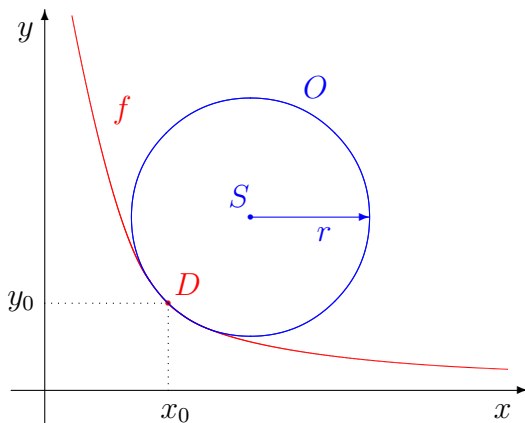
Oskulační kružnice, křivost

Předpokládejme, že $f''(x_0) \neq 0$. Označme $y_0 = f(x_0)$, $y'_0 = f'(x_0)$ a $y''_0 = f''(x_0)$.

Problém: Hledejme kružnici, která se ze všech kružnic nejvíce přimyká ke grafu funkce f v okolí bodu $[x_0, f(x_0)]$. Hledaná kružnice má rovnici

$$(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 = r^2, \quad (1)$$

kde x_s, y_s (souřadnice středu kružnice) a r (poloměr) jsou zatím neznámé. Kružnice bude jednoznačně určena hodnotami těchto neznámých.



O ... oskulační kružnice

r ... poloměr křivosti

r^{-1} ... křivost

$S = [x_s, y_s]$... střed křivosti

$D = [x_0, f(x_0)]$... bod dotyku

Jak vypočítáme souřadnice středu křivosti a poloměr křivosti?

Neznámé v rovnici (1) jsou tři, na kružnici tudíž můžeme klást tři podmínky:

- 1) Kružnice prochází bodem $[x_0, y_0]$.
- 2) Kružnice má v bodě $[x_0, y_0]$ stejný sklon jako graf funkce f .
- 3) Kružnice je v bodě $[x_0, y_0]$ stejně zakřivena, jako graf funkce f .

Užijeme-li vhodně tyto tři podmínky, obdržíme vzorce:

$$x_s = x_0 - y'_0 \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}, \quad y_s = y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}, \quad r = \frac{(1 + y_0'^2)^{3/2}}{|y_0''|}.$$

Příklady: viz TABULE

Princip odvození výše uvedených vzorců:

1) Kružnice prochází bodem $[x_0, y_0]$:

$$(x_0 - x_s)^2 + (y_0 - y_s)^2 = r^2 \tag{2}$$

2) Kružnice má v bodě $[x_0, y_0]$ stejný sklon jako graf funkce f . Považujeme-li kružnici v okolí bodu $[x_0, y_0]$ za graf funkce $y(x)$, pak $y(x)$ vyhovuje rovnici (1). Tuto rovnici derivujeme podle x :

$$2(x - x_s) + 2(y(x) - y_s) y'(x) = 0.$$

Dosadíme $x = x_0$ a $y(x_0) = y_0$. Podmínka stejného sklonu kružnice a grafu funkce f znamená: $y'(x_0) = y'_0$. Takto dostaneme:

$$2(x_0 - x_s) + 2(y_0 - y_s) \cdot y'_0 = 0. \quad (3)$$

3) Kružnice je v bodě $[x_0, y_0]$ stejně zakřivena, jako graf funkce f . Rovnici (1) derivujeme dvakrát podle x :

$$2 + 2y'(x)^2 + 2(y(x) - y_s) y''(x) = 0.$$

Dosadíme $x = x_0$, $y = y_0$ a $y'(x_0) = y'_0$. Podmínka stejného zakřivení znamená: $y''(x_0) = y''_0$. Takto dostaneme:

$$2 + 2y'_0{}^2 + 2(y_0 - y_s) y''_0 = 0. \quad (4)$$

Vypočítáme-li x_s , y_s a r ze soustavy rovnic (2), (3), (4), obdržíme vzorce pro x_s , y_s a r .