Matematika I – přednáška 17

Shrnutí co bylo minule

Taylorův polynom.

Co bude dnes

Primitivní funkce, neurčitý integrál, metoda per partes.

Tyto slidy jsou na adrese
https://users.fs.cvut.cz/jan.valasek
(pro osobní potřeby, nenahrazuje přednášku ani skripta).

Matematika I – přednáška 17

III. Integrální počet reálné funkce jedné reálné proměnné

Primitivní funkce, neurčitý integrál

Primitivní funkce. Funkci F nazýváme *primitivní funkcí* k funkci f v intervalu I, jestliže $F' = f$ v I.

Poznámka. Označme a, b koncové body intervalu I. Předpokládejme, že $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Výrokem $F' = f$ v intervalu I se přesně míní toto:

a) $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$,

b) $F'_+(a) = f(a)$ (pokud $a \in I$),

c) $F'_-(b) = f(b)$ (pokud $b \in I$).

Poznámka. Několik dalších přednášek bude věnováno otázce, jak k zadané funkci f nalézt primitivní funkci F.

Nalézt primitivní funkci je problém opačný, než vypočítat derivaci.

Primitivní funkce je důležitá zejména při

(i) výpočtu tzv. určitého integrálu (uvidíte ještě v tomto semestru),

(ii) výpočtu tzv. dvojných a trojných integrálů (tj. integrálů funkcí dvou a tří proměnných, uvidíte ve druhém semestru),

(iii) řešení diferenciálních rovnic (uvidíte ve třetím semestru).

První otázkou při hledání primitivní funkce k funkci f v intervalu I je otázka, zda primitivní funkce existuje.

Věta (o existenci primitivní funkce). *Je-li funkce f spojitá v intervalu I, pak primitivní funkce k f v intervalu I existuje.*

Další důležitou otázkou je otázka jednoznačnosti primitivní funkce.

Věta (k otázce jednoznačnosti primitivní funkce). a) *Je-li F primitivní funkce k funkci f v intervalu I a C je libovolná konstanta, pak $F + C$ je také primitivní funkcí k funkci f v intervalu I.*

b) Jsou-li F a G dvě primitivní funkce k funkci f v intervalu I, pak existuje reálná konstanta C taková, že $G = F + C$ v I.

Důkaz: viz TABULE

Uvedená věta říká, že pokud k funkci f existuje slespoň jedna primitivní funkce F v intervalu I, pak takových primitivních funkcí již existuje nekonečně mnoho. Všechny se ale navzájem liší pouze o nějakou konstantu. Množina všech primitivních funkcí k funkci f v intervalu I má tedy strukturu: $\{F(x) + C;\ x \in I,\ C \in \mathbb{R}\}$.

Neurčitý integrál. Množinu všech primitivních funkcí k funkci f v intervalu I nazýváme *neurčitým integrálem* funkce f v intervalu I.

Používáme označení: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ pro $x \in I$ nebo stručněji pouze $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ nebo jenom $\displaystyle\int f\,\mathrm{d}x$.

Poznámka. Je-li F primitivní funkce k funkci f v intervalu I, pak vzhledem k tomu, jakou má množina všech primitivních funkcí strukturu, logicky píšeme:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \quad \text{pro } x \in I.$$

Konstantu C nazýváme *integrační konstantou*.

Problém nalezení (= výpočtu) neurčitého integrálu funkce f v intervalu I je tedy identický s problémem nalezení primitivní funkce k funkci f v intervalu I.

Na větu o existenci primitivní funkce můžeme tedy také nahlížet jako na větu o existenci neurčitého integrálu. Primitivních funkcí se týká věta:

Věta. *Jsou-li F a G primitivní funkce k funkcím f a g v intervalu I pak $F+G$ je primitivní funkcí k $f+g$ v intervalu I.*

Je-li F primitivní funkce k f v intervalu I a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak αF je primitivní funkcí k αf v intervalu I.

Důkaz: viz TABULE

Důsledek. *Mají-li funkce f a g neurčité integrály v intervalu I a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak*

$$\int [\, f(x) + g(x)\,]\,\mathrm{d}x \;=\; \int f(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \int g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pro } x \in I$$

$$\int \alpha f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pro } x \in I.$$

Poznámka. Zde se přesně vzato jedná o rovnosti mezi množinami funkcí. Například první rovnosti je třeba rozumět takto:

Libovolnou funkci z množiny vlevo je možné vyjádřit jako součet nějaké funkce z množiny $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ a nějaké funkce z množiny $\int g(x)\,\mathrm{d}x$. Naopak, součet libovolné funkce z množiny $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ a libovolné funkce z množiny $\int g(x)\,\mathrm{d}x$ patří do množiny $\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Zobecnění. *Mají-li funkce $f_1, \ldots, f_n$ neurčité integrály v intervalu I a jsou-li $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ reálná čísla, platí*

$$\int [\,\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n\,]\,\mathrm{d}x \;=\; \alpha_1 \int f_1\,\mathrm{d}x + \ldots + \alpha_n \int f_n\,\mathrm{d}x \quad \text{pro } x \in I.$$

Tabulka základních neurčitých integrálů. Otočením vzorců pro derivace elementárních funkcí dostáváme vzorce pro některé neurčité integrály:

a) $\displaystyle\int 0 \, \mathrm{d}x = C$

b) $\displaystyle\int x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

c) $\displaystyle\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$

d) $\displaystyle\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x + C$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C$

i) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$

j) $\displaystyle\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

k) $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$

Každý ze vzorců platí v libovolném intervalu, obsaženém v def. oboru integrované funkce.

Pozn.: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c\,, \quad x \neq 0$

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x\,, & x > 0 \\ \ln(-x)\,, & x < 0 \end{cases}$$

$x > 0 \quad (\ln x + c)' = \frac{1}{x}$

$x < 0 \quad (\ln(-x) + c)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

Poznámka. Jak vyplývá poslední vzorec (integrál $1/x$) ze vzorce pro derivaci logaritmu? Viz TABULE

Poznámka k integrálům $1/\sqrt{1-x^2}$ a $1/(1+x^2)$ – viz TABULE

Příklady. Vypočítejte integrály

1) $\displaystyle\int 5 \, \mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int 7x^3 \, \mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int (3x^2 + 5x + 2) \, \mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int (7 \sin x + 5x^2 - 3\mathrm{e}^x) \, \mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int \left(\frac{5}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right) \mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int \left(-\frac{4}{x^2} + \frac{3}{x} + 4 - 2x + 6x^2\right) \mathrm{d}x$

Řešení: viz TABULE

Poznámka. Zatímco derivování je více-méně automatická procedura, tak pro integrování toto neplatí. Neexistuje žádné obecné pravidlo (postup), jehož užitím by bylo možné vypočítat jakýkoliv integrál. Existují pouze pravidla (postupy, metody), která lze aplikovat na různé speciální třídy funkcí.

Integrace per partes (neboli otočení pravidla pro derivování součinu)

Motivace. Derivace součinu: $(uv)' = u'v + uv'$. Odtud plyne: $u'v = (uv)' - uv'$. Integrujeme-li obě strany, obdržíme: $\int u'v = uv - \int uv'$. Přesně vše shrnuje tato věta:

Věta (o integraci per–partes). *Mají-li funkce u a v spojité derivace v intervalu I, pak*

$$\boxed{\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x} \qquad \textit{pro } x \in I.$$

Příklady. Vypočítejte integrály

1) $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ 2) $\displaystyle\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$ 3) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x$ 5) $\displaystyle\int x \ln x\,\mathrm{d}x$ 6) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

Návod k řešení: viz TABULE