Matematika I – přednáška 18

Shrnutí co bylo minule

Primitivní funkce. Neurčitý integrál. Metoda per partes.

Co bude dnes

Substituční metoda. Integrace funkcí $\sin^m x \cdot \cos^n x$.

Tyto slidy jsou na adrese
https://users.fs.cvut.cz/jan.valasek
(pro osobní potřeby, nenahrazuje přednášku ani skripta).

Matematika I – přednáška 18

Substituční metoda

(otočení pravidla pro derivování složené funkce)

Motivace. Předpokládejme, že F je primitivní funkce k funkci f v intervalu I. Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(x)+C \quad \text{pro } x \in I.$$

Je-li $x = g(t)$ pro t v intervalu J, pak podle vzorce pro derivaci složené funkce je

$$[F(g(t))]' \;=\; F'(g(t))\,g'(t) \;=\; f(g(t))\,g'(t) \quad \text{pro } t \in J.$$

To znamená, že

$$\int f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; F(g(t))+C \quad \text{pro } t \in J.$$

Vidíme, že pravé strany obou formulí jsou stejné, dosadíme-li $x = g(t)$. Tudíž se (za podmínky $x = g(t)$) rovnají i levé strany. Následující věta vše shrnuje a upřesňuje.

Věta (o integraci substitucí). *Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu I, funkce $x = g(t)$ má spojitou derivaci v intervalu J a zobrazuje tento interval na interval I. Pak platí*

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,\mathrm{d}t} \qquad \textit{pro } x \in I,\ t \in J,\ x = g(t).$$

Uvedenou formuli lze použít dvěma směry:

I. Chceme vypočítat integrál vpravo a problém převedeme na výpočet integrálu vlevo.

II. Chceme vypočítat integrál vlevo a problém převedeme na výpočet integrálu vpravo.

Oba způsoby dále popíšeme podrobněji.

I. Chceme vypočítat integrál vpravo. Položíme $g(t) = x$ a $g'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Tak získáme integrál vlevo. Tento integrál vypočítáme (pro $x \in I$). Do výsledku pak dosadíme $x = g(t)$.

Toto má smysl tehdy, je-li integrál vlevo jednodušší, než integrál vpravo.

Příklad. Vypočítejme $\displaystyle\int \sin^5 t \cdot \cos t \,\mathrm{d}t.$

Užijeme substituci: $\left[\begin{array}{l} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = (\sin t)' \,\mathrm{d}t = \cos t \,\mathrm{d}t \end{array}\right].$

Dosazením do integrálu dostaneme:

$$\int \sin^5 t \cdot \cos t \,\mathrm{d}t = \int x^5 \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}\, x^6 + C = \tfrac{1}{6} \sin^6 t + C \quad \text{pro } t \in (-\infty, \infty).$$

Příklad. Vypočítejme $\displaystyle\int \frac{\ln^2 s}{s} \,\mathrm{d}s.$

Užijeme substituci: $\left[\begin{array}{l} x = \ln s \\ \mathrm{d}x = (\ln s)' \,\mathrm{d}s = \dfrac{1}{s} \,\mathrm{d}s \end{array}\right].$

Dosazením do integrálu dostaneme:

$$\int \frac{\ln^2 s}{s} \,\mathrm{d}s = \int x^2 \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\, x^3 + C = \tfrac{1}{3} \ln^3 s + C \quad \text{pro } s \in (0, \infty).$$

Příklad. Vypočítejme $\displaystyle\int e^{x^2} x \, dx$.

Užijeme substituci: $\left[\begin{array}{l} y = x^2 \\ dy = (x^2)' \, dx = 2x \, dx \implies x \, dx = \frac{1}{2} \, dy \end{array}\right]$.

Dosazením do integrálu dostaneme:

$$\int e^{x^2} x \, dx = \int e^y \, \tfrac{1}{2} \, dy = \tfrac{1}{2} \, e^y + C = \tfrac{1}{2} \, e^{x^2} + C \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty).$$

Příklad. Vypočítejme $\displaystyle\int \sin(5x) \, dx$.

Užijeme substituci: $\left[\begin{array}{l} y = 5x \\ dy = (5x)' \, dx = 5 \, dx \implies dx = \frac{1}{5} \, dy \end{array}\right]$.

Dosazením do integrálu dostaneme:

$$\int \sin(5x) \, dx = \int \sin y \, \tfrac{1}{5} \, dy = -\tfrac{1}{5} \, \cos y + C = -\tfrac{1}{5} \, \cos(5x) + C \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty).$$

Příklad. Vypočítejme $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$, kde f je nenulová funkce se spojitou derivací v intervalu I.

Užijeme substituci: $\left[\begin{array}{l} f(x) = u \\ f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array}\right]$.

Dosazením do integrálu dostaneme:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C \qquad \text{pro } x \in I.$$

II. Chceme vypočítat integrál vlevo, což je $\int f(x)\ \mathrm{d}x$. V tomto integrálu položíme $x = g(t)$ a $\mathrm{d}x = g'(t)\ \mathrm{d}t$. Tímto způsobem převedeme integrál $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ na integrál vpravo, tj. na $\int f(g(t))\,g'(t)\ \mathrm{d}t$. Tento integrál vypočítáme pro $t \in J$. Výsledek ještě transformujeme do proměnné x. K tomu potřebujeme, aby k funkci g (v intervalu J) existovala inverzní funkce g_{-1}. Do výsledku tedy dosadíme $t = g_{-1}(x)$, čímž se dostaneme zpět k proměnné x.

Toto má smysl tehdy, je-li integrál vpravo jednodušší, než integrál vlevo.

Příklad. Vypočítejme $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{9+x^2}$.

Užijeme substituci: $\left[\begin{array}{l} x = 3t \\ \mathrm{d}x = (3t)'\,\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}t \end{array}\right]$.

Dosazením do integrálu dostaneme:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{9+x^2} = \int \frac{3\,\mathrm{d}t}{9+9t^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C \qquad \text{pro } x \in (-\infty, \infty).$$

Další příklady:

1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} \quad (a \in \mathbb{R})$

2) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x + 1}{x\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-8x^2}}$

4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2^x+1}}\,\mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$

Návod k řešení: viz TABULE

Integrace funkcí typu $\sin^m x \cdot \cos^n x$

I. Případ, kdy alespoň jedno z čísel m, n je liché.

Předpokládáme, že například n je liché, tj. n lze vyjádřit: $n = 2k+1$, kde k je celé číslo. Pak

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \, \cos^n x \, \mathrm{d}x &= \int \sin^m x \, \cos^{2k+1} x \, \mathrm{d}x = \int \sin^m x \, (\cos^2 x)^k \cdot \cos x \, \mathrm{d}x \\ &= \int \sin^m x \, (1-\sin^2 x)^k \cdot \cos x \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

V integrálu $\displaystyle\int \sin^m x \, (1-\sin^2 x)^k \, \cos x \, \mathrm{d}x$ pak užijeme substituci $\sin x = t$.

Pokud je lichým číslem m, postupujeme analogicky.

Příklad. $\displaystyle\int \sin^4 x\ \cos x\ \mathrm{d}x \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = t \\ (\sin x)'\,\mathrm{d}x = \cos x\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right]$

$$= \int t^4\ \mathrm{d}t \ = \ \tfrac{1}{5}\,t^5 + C \ = \ \tfrac{1}{5}\ \sin^5 x + C \qquad \textbf{pro } x \in (-\infty, \infty)$$

Příklad. $\displaystyle\int \sin^3 x\ \cos^4 x\ \mathrm{d}x \ = \int \sin^2 x\ \sin x\ \cos^4 x\ \mathrm{d}x$

$$= \int (1-\cos^2 x)\ \cos^4 x\ \sin x\ \mathrm{d}x \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ (\cos x)'\,\mathrm{d}x = -\sin x\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right]$$

$$= \ -\int (1-t^2)\ t^4\ \mathrm{d}t \ = \ \ldots \ \text{ tento integrál již umíme vypočítat}$$

Příklad. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} \ = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \ = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right]$

$$= \ -\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} \ = \ \ldots \ \text{ tento integrál již umíme vypočítat}$$

II. Případ, kdy obě čísla m, n jsou sudá.

Použijeme vzorce

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}}, \qquad \boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}}.$$

Tyto vzorce případně použijeme víckrát, až obdržíme integrál, kde buď sinus nebo kosinus jsou v liché mocnině. Pak postupujeme jako v případě I.

Příklad.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2 2x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \left(1-\frac{1+\cos 4x}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{8}\int \cos 4x \, \mathrm{d}x \quad \left[\begin{array}{l} t = 4x \\ \mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t \end{array}\right] \\
&= \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty).
\end{aligned}$$