Matematika I – přednáška 2

Shrnutí co bylo minule

Vektory a vektorový prostor.

Lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost.

Co bude dnes

Lineární závislost a nezávislost, Dimenze a Báze vektorového prostoru, podprostory.

Tyto slidy jsou na adrese
https://users.fs.cvut.cz/jan.valasek
(pro osobní potřeby a nenahrazuje účast na přednášce).

Věta. *Skupina vektorů* $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2, \ldots\ ,\ \mathbf{u}_n$ *z vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *je lineárně nezávislá právě tehdy, má-li vektorová rovnice*

$$\alpha_1\mathbf{u}_1\ +\ \alpha_2\mathbf{u}_2\ +\ \ldots\ +\ \alpha_n\mathbf{u}_n\ =\ \mathbf{o}$$

(pro neznámé $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots\ ,\ \alpha_n$*) pouze nulové řešení* $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \ldots\ ,\ \alpha_n = 0.$

Věta je jednoduchým důsledkem definice lineární závislosti a nezávislosti vektorů.

Příklad. Rozhodněte, zda skupina vektorů (1,2,0), (0,2,4) a (3,2,3) ve $\mathbf{V}(\mathbb{E}_3)$ je LZ nebo LN.

Řešení – viz TABULE $\boxed{\text{T2.1}}$

Příklad. Rozhodněte, zda skupina vektorů (5,1,2), (1,2,3), (3,0,0) a (0,1,2) ve $V(E_3)$ je LZ nebo LN.

Řešení – viz TABULE $\boxed{\text{T2.2}}$

Příklad. Rozhodněte, zda skupina vektorů $(3, 2, 1, 5)$, $(1, 0, 1, 4)$ a $(1, 0, -1, -3)$ ve $V(E_4)$ je LZ nebo LN.

Řešení – viz TABULE $\boxed{\text{T2.3}}$

Poznámka. Dva vektory jsou LZ právě když leží na stejné přímce (procházející počátkem). Tři vektory jsou LZ právě když všechny leží ve stejné rovině (procházející počátkem).

Věta. Nechť V je vektorový prostor a $u_1, u_2, \ldots, u_n$ je skupina vektorů z V která je lineárně závislá. Pak každá (větší) skupina vektorů z V, obsahující vektory $u_1, u_2, \ldots, u_n$, je rovněž lineárně závislá.

Princip důkazu: viz TABULE $\boxed{\text{T2.4}}$

Definice (dimenze vektorového prostoru). Nechť n je přirozené číslo. O vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ řekneme, že je *n–rozměrný* (neboli že má *dimenzi* rovnou n – používáme zápis $dim\,\mathbf{V} = n$), jestliže

a) v prostoru $\mathbf{V}$ existuje skupina n vektorů, která je lineárně nezávislá,

b) každá skupina více než n vektorů ve $\mathbf{V}$ je lineárně závislá.

Jinými slovy: dimenze vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je rovna maximálnímu počtu lineárně nezávislých vektorů, které lze ve $\mathbf{V}$ nalézt.

Definice (báze vektorového prostoru). Nechť $\mathbf{V}$ je n–rozměrný vektorový prostor. Každou lineárně nezávislou skupinu n vektorů z $\mathbf{V}$ nazýváme *bází* prostoru $\mathbf{V}$.

Poznámka. Počet vektorů v jakékoliv bázi $\mathbf{V}$ je stejný a je roven dimenzi $\mathbf{V}$.

Věta. *Je-li $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ báze vektorového prostoru $\mathbf{V}$, pak každý vektor z $\mathbf{V}$ lze vyjádřit jediným způsobem způsobem jako lineární kombinaci vektorů této báze.*

Příklad. Vektory $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$ tvoří bázi prostoru $\mathbf{V}(\mathbb{E}_3)$.

Příklad. Aritmetické vektory $\mathbf{e}_1 = [1,0,...,0]$, $\mathbf{e}_2 = [0,1,...,0]$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n = [0,0,...,1]$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^n$.

Důležitá poznámka. Báze vektorového prostoru není určena jednoznačně !

Definice (podprostor vektorového prostoru). Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor a nechť $\mathbf{W}$ je podmnožina prostoru $\mathbf{V}$. Je-li $\mathbf{W}$ vektorovým prostorem (se stejně definovanými operacemi sčítání a násobení vektorů reálnými čísly jako v prostoru $\mathbf{V}$), nazýváme $\mathbf{W}$ *podprostorem* vektorového prostoru $\mathbf{V}$.

Jak poznat podprostor. Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor a $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$. Chceme zjistit, zda $\mathbf{W}$ je podprostor $\mathbf{V}$.

Operace sčítání vektorů a násobení vektorů reálnými čísly jsou ve $\mathbf{W}$ definovány, protože tyto operace jsou definovány ve $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$.

K tomu, abychom zjistili zda $\mathbf{W}$ je samostatným vektorovým prostorem (a tudíž podprostorem $\mathbf{V}$), stačí ověřit uzavřenost $\mathbf{W}$ vůči oběma operacím.

Příklad. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{W} = \{[\alpha, \beta, 0] \in \mathbb{R}^3;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
Zjistěte, zda **W** je podprostorem **V**.

Řešení – viz TABULE $\boxed{\text{T2.5}}$

Příklad. $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbb{E}_3)$, $\mathbf{W} = \{(2\alpha, 5\alpha, -3\alpha) \in \mathbf{V}(\mathbb{E}_3);\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.
Zjistěte, zda **W** je podprostorem **V**.

Řešení – viz TABULE $\boxed{\text{T2.6}}$

Příklad. $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbb{E}_3)$, $\mathbf{W} = \{(2\alpha, 5\alpha, -3\alpha + 5) \in \mathbf{V}(\mathbb{E}_3);\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.
Zjistěte, zda **W** je podprostorem **V**.

Řešení – viz TABULE $\boxed{\text{T2.7}}$

Příklad. $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbb{E}_4)$, $\mathbf{W} = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{V}(\mathbb{E}_4);\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0\}$.
Zjistěte, zda **W** je podprostorem **V**.

Řešení – viz TABULE $\boxed{\text{T2.8}}$

Příklad. Je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor a je-li $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ skupina vektorů z $\mathbf{V}$, pak množina všech možných lineárních kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ tvoří podprostor prostoru $\mathbf{V}$. (Tento podprostor je nazýván *lineární obal* skupiny vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.)

Poznámka. Je–li skupina vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně nezávislá, pak zároveň tvoří bázi svého lineárního obalu a dimenze lineárního obalu je rovna k.