Matematika I – přednáška 20

Shrnutí co bylo minule

Integrace racionálních funkcí.

Co bude dnes

Integrace funkcí typu $R\left(x,\ \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}\right)$. Shrnutí metod integrace.

Tyto slidy jsou na adrese
https://users.fs.cvut.cz/jan.valasek
(pro osobní potřeby, nenahrazuje přednášku ani skripta).

Matematika I – přednáška 20

Integrace funkcí typu $R\left(x,\ \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ (pouze ke zkoušce úrovně α)

Racionální funkce dvou proměnných: podíl dvou polynomů dvou proměnných

$$R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$$

Příklady racionálních funkcí dvou proměnných:

$$R(u,v) = \frac{uv+v^3-1}{u^2+1}, \qquad R(u,v) = \frac{2}{2-v}, \qquad R(u,v) = \frac{u+v}{u-v},$$ atd.

Integrály typu $\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,\mathrm{d}x$.

Předpokládejme, že $ad - bc \neq 0$.

Tato nerovnost zaručuje, že polynomy $ax + b$ a $cx + d$ jsou nesoudělné (tj. ani jeden z nich není číselným násobkem druhého).

Je možné použít substituci $\quad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\,.$

Odtud vyjádříme x a $\mathrm{d}x$. Tímto způsobem integrál převedeme na integrál racionální funkce proměnné t.

Příklad. Vypočítejme integrál $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$

Integrovaná funkce je definovaná a spojitá na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,1\rangle$. Na každém z těchto intervalů tudíž existuje primitivní funkce i neurčitý integrál.

Užijeme substituci $t=\sqrt{1-x}$. Odtud plyne: $x=1-t^2$ a $\mathrm{d}x=-2t\,\mathrm{d}t$.
Dosazením do integrálu dostáváme

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{t}{1+(1-t^2)}\,(-2t)\,\mathrm{d}t \;=\; 2\int \frac{t^2}{t^2-2}\,\mathrm{d}t$$

Toto je integrál racionální funkce, který již umíme vypočítat.

Vypočítejte si tento integrál sami.

Do výsledku nakonec dosadíme $t=\sqrt{1-x}$.

Další příklady: Vypočítejte integrály

$$\mathbf{1)}\quad \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \mathbf{2)}\quad \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x.$$

Postup řešení: viz TABULE

Další speciální integrály

1) Typ $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, \mathrm{d}x$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$

a) $\underline{a < 0}$ a navíc

kvadratický polynom $ax^2 + bx + c$ měl dva různé reálné kořeny α, β.

Pak

$$t = \sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}}$$

a viz předchozí substituce.

b) $\underline{a > 0}$ V tomto případě můžeme použít tzv. Eulerovu substituci

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + \sqrt{a}\, x.$$

Další speciální integrály

2) Typ $\int R(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x$

Pomocí univerzální goniometrické substituce

$$t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

převedeme na parciální zlomky.
Jak?

$$\cos^2(x/2) = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)}, \qquad \sin^2(x/2) = 1 - \cos^2(x/2) = \frac{\mathrm{tg}^2(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)},$$

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \frac{1-\mathrm{tg}^2(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin x = 2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2) = \frac{2\,\mathrm{tg}\,(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{2\,t}{1+t^2}.$$

„Diferencováním" rovnice $\mathrm{tg}\,(x/2) = t$ dále obdržíme:

$$\frac{1}{2\cos^2(x/2)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t, \qquad \text{tj. } \tfrac{1}{2}\left[1+\mathrm{tg}^2(x/2)\right]\mathrm{d}x = \mathrm{d}t.$$

Integrály bez elementárních výsledků

Známé integrály, jejichž primitivní funkce se nedají vyjádřit pomocí konečného počtu funkcí.

1) Binomické integrály

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, \mathrm{d}x, \quad \text{kde } a, b \in \mathbb{R}, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}$$

pokud $p, \frac{m+1}{n}, p + \frac{m+1}{n}$ není celé

2) Eliptické integrály

$$\int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}$$

Integrály bez elementárních výsledků

3) Fresnelovy integrály

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2)\, dt, \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt.$$

Atd, viz např.:
https://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_1_7.pdf

Příklady řešení integrálů, shrnutí: