Matematika I – přednáška 21

Shrnutí co bylo minule

Integrace funkcí.

Co bude dnes

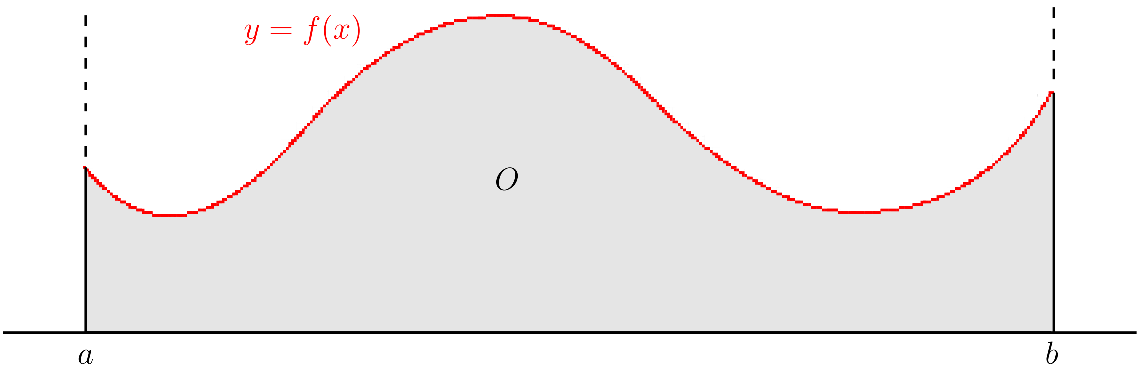
Určitý integrál.

Tyto slidy jsou na adrese
https://users.fs.cvut.cz/jan.valasek
(pro osobní potřeby, nenahrazuje přednášku ani skripta).

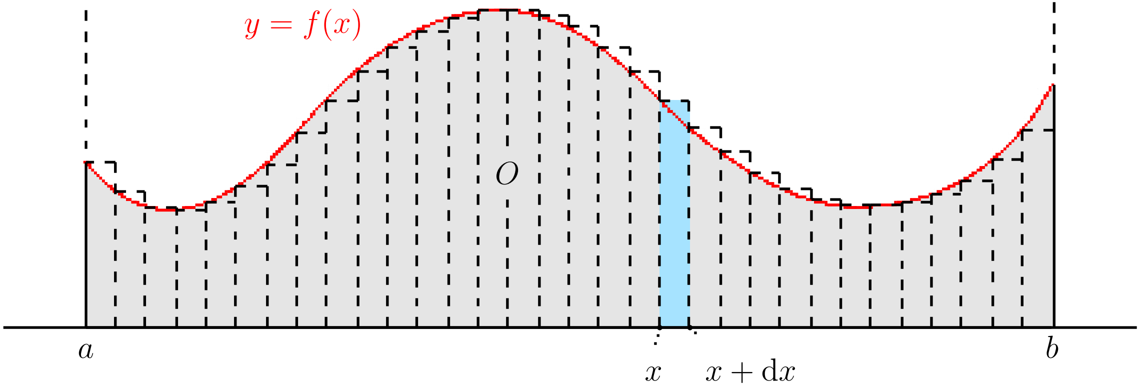
Matematika I – přednáška 21

Určitý integrál: motivace a historický přístup

Geometrická motivace: **Jak definovat a vypočítat obsah obrazce O?**



Historický přístup k řešení: I. Newton a G. W. Leibniz (17. století)



Představme si, že interval $\langle a, b\rangle$ můžeme rozdělit na nekonečně mnoho „nekonečně malých" intervalů o délce $\mathrm{d}x$, kde $\mathrm{d}x$ je „nekonečně malé" kladné číslo.

$\mathrm{d}P$ ... obsah „nekonečně tenkého" obdélníku nad intervalem $\langle x, x{+}\mathrm{d}x\rangle$: $\mathrm{d}P = f(x)\,\mathrm{d}x$

P ... obsah obrazce O = součet všech nekonečně mnoha „nekonečně malých" členů $f(x)\,\mathrm{d}x$ pro x měnící se od a do b

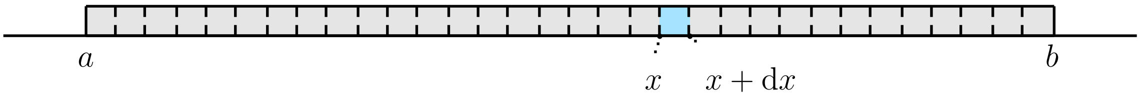
značení tohoto součtu: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, název: **určitý integrál** funkce f od a do b

Ačkoliv tato „definice" je z dnešního pohledu nepřesná a ne zcela jasná, **Newton i Leibniz přišli na to, jak integrál přesně vypočítat.** (Uvidíme později.)

Fyzikální motivace: (jedna z mnoha)

Tyč o délce l, pokrývající interval $\langle a, b\rangle$ na ose x, má proměnnou délkovou hustotu $\rho(x)$. (Délková hustota je hmotnost, vztažená k jednotce délky.)

Jaká je celková hmotnost tyče?



Představme si opět, že interval $\langle a, b\rangle$ můžeme rozdělit na nekonečně mnoho „nekonečně malých" intervalů o délce $\mathrm{d}x$, kde $\mathrm{d}x$ je „nekonečně malé" kladné číslo.

$\mathrm{d}m \dots$ hmotnost „nekonečně krátkého" úseku tyče v intervalu $\langle x, x+\mathrm{d}x\rangle$: $\mathrm{d}m = \rho(x)\,\mathrm{d}x$

$m \;\dots$ hmotnost celé tyče = součet všech nekonečně mnoha „nekonečně malých" členů $\rho(x)\,\mathrm{d}x$ pro x měnící se od a do b

Toto je součet stejného typu, jako když jsme se zabývali obsahem obrazce O.

Opět tedy dospíváme k určitému integrálu, tentokrát k $\displaystyle\int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x$.

Riemannova definice určitého integrálu – Riemannův integrál (19. století)

Předpokládejme, že $-\infty < a < b < \infty$ a f je omezená funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Systém bodů $x_0,\ x_1,\ \dots\ ,\ x_n$ v $\langle a, b\rangle$ takových, že

$$a \ = \ x_0 \ < \ x_1 \ < \ \dots \ < x_n \ = \ b$$

se nazývá *dělení* intervalu $\langle a, b\rangle$.

Nazveme-li toto dělení D, pak píšeme:

$$D: \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

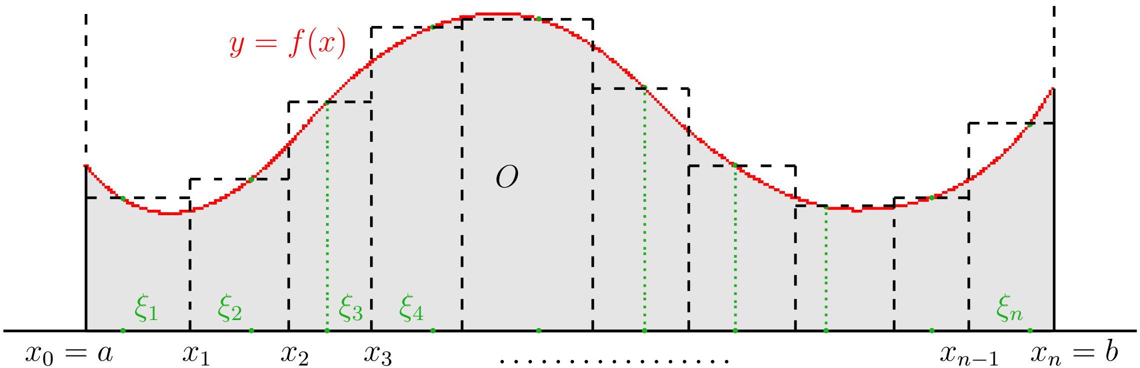
Normou dělení D nazýváme číslo

$$\|D\| \ := \ \max_{i=1,\dots,n} \ \Delta x_i,$$

kde $\Delta x_i := (x_i - x_{i-1})$ = délka intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$.

$\|D\|$ je délka nejdelšího ze sub–intervalů $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$.

$\|D\|$ poskytuje informaci o tom, jak „jemné” je dělení D.



Riemannův součet. Nechť $D: \;\; a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Zvolme v každém z intervalů $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ bod ξ_i. Označme V systém zvolených bodů:

$$V: \;\; \xi_1 \in \langle x_0, x_1\rangle, \;\; \xi_2 \in \langle x_1, x_2\rangle, \;\; \ldots, \;\; \xi_n \in \langle x_{n-1}, x_n\rangle.$$

Riemannovým součtem funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$, odpovídajícím dělení D a systému V, nazýváme součet

$$s(f, D, V) \; := \; \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Limita Riemannových součtů. Říkáme, že číslo S je *limitou Riemannových součtů* $s(f, D, V)$ pro $\|D\| \to 0+$, jestliže ke každému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ a jakýkoliv systém V bodů $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ platí implikace

$$\|D\| < \delta \implies |s(f, D, V) - S| < \epsilon.$$

Píšeme: $\lim\limits_{\|D\| \to 0+} s(f, D, V) = S.$

Definice (Riemannův integrál). Nechť $\lim\limits_{\|D\| \to 0+} s(f, D, V) = S$. Pak o funkci f říkáme, že je *integrovatelná* v intervalu $\langle a, b\rangle$. Číslo S nazýváme *Riemannův integrál* funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$. Integrál označujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{nebo jenom} \quad \int_a^b f\,\mathrm{d}x.$$

$a \ldots$ dolní mez, $b \ldots$ horní mez, $f \ldots$ integrand

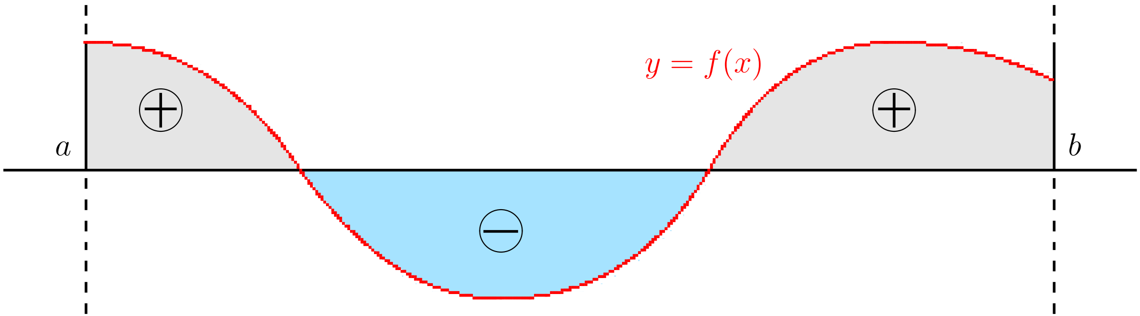
Místo toho, že „funkce f je integrovatelná v intervalu $\langle a, b\rangle$" také říkáme, že „Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje".

Geometrický význam Riemannova integrálu: obsah obrazce mezi grafem funkce f a osou x.

Je-li f nezáporná integrovatelná funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak *obsahem* obrazce mezi grafem funkce f a osou x nazýváme číslo, jehož hodnota je rovna integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Analogicky, pokud funkce f je nekladná a integrovatelná v $\langle a, b\rangle$, pak obsahem obrazce mezi grafem funkce f a osou x nazýváme číslo $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

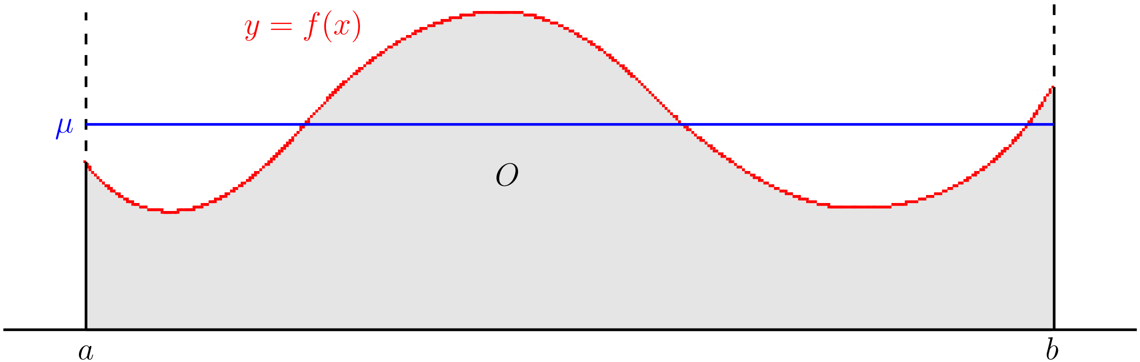
V obecném případě, kdy f nabývá v intervalu $\langle a, b\rangle$ kladných i záporných hodnot, vyjadřuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ součet obsahů všech obrazců mezi grafem funkce f a osou x, příspěvky od částí pod osou x jsou však v součtu brány se záporným znaménkem.



Střední hodnota funkce f. Nechť f je integrovatelná funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak číslo

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazýváme *střední hodnotou* funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$.



Obdélník o stranách $b-a$ a μ má stejný obsah, jako obrazec O mezi grafem funkce f a osou x.

Poznámka. Pokud existuje maximum a minimum funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) \ \le\ \mu \ =\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \le\ \max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x).$$

Obecněji, je-li $m \le f(x) \le M$ v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$m \ \le\ \mu \ =\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \le\ M.$$

Odtud plyne: $$m\cdot(b-a) \ \le\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \le\ M\cdot(b-a).$$

Rozšíření definice Riemannova integrálu. Je-li funkce f integrovatelná v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak pokládáme

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Speciálně také definujeme $$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Vybrané vlastnosti a výpočet Riemannova integrálu

Věta (o existenci Riemannova integrálu). *Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak f je integrovatelná v $\langle a, b\rangle$.*

Obecněji: *Nechť funkce f je omezená a po částech spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak f je integrovatelná v $\langle a, b\rangle$.*

(Funkce f se nazývá *po částech spojitá* v intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže $\langle a, b\rangle$ lze rozdělit na konečně mnoho sub–intervalů, přičemž funkce f je spojitá ve vnitřku každého z nich.)

Poznámka. Je-li f integrovatelná funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ a liší-li se funkce g od f pouze v konečně mnoha bodech, pak g je také integrovatelnou funkcí v $\langle a, b\rangle$ a

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \quad \cancel{\Rightarrow f = g}$$

(Existence ani hodnota integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ nezávisí na hodnotách f v konečně mnoha bodech. Funkce f ani nemusí být definována v konečně mnoha bodech intervalu $\langle a, b\rangle$.)

Důležité formule: (platné například za předpokladu, že existují integrály vpravo)

$$\int_a^b \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] \mathrm{d}x \;=\; \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

linearita určitého integrálu

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

aditivita určitého integrálu vzhledem k intervalu

Věta (Leibniz, Newton). *Je-li f spojitá funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ a F je primitivní funkce k f v $\langle a, b\rangle$, pak*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(b) - F(a)}.$$

Tento vzorec se nazývá *Leibnizova–Newtonova formule*. (Pochází ze 17. století.)

Rozdíl $F(b) - F(a)$ je často zapisován kratším způsobem:

$$F(b) - F(a) \;=\; [\,F\,]_a^b,$$

nebo také

$$F(b) - F(a) \;=\; [\,F(x)\,]_{x=a}^{x=b}.$$

V anglicky psané literatuře se tato věta nazývá **Fundamental theorem of calculus.**

Příklady: viz TABULE