Matematika I – přednáška 22

Shrnutí co bylo minule

Určitý integrál.

Co bude dnes

Vybrané vlastnosti a výpočet Riemannova integrálu.

Tyto slidy jsou na adrese
https://users.fs.cvut.cz/jan.valasek
(pro osobní potřeby, nenahrazuje přednášku ani skripta).

Matematika I – přednáška 22

Zobecnění věty z konce minulé přednášky:

Věta (Leibniz, Newton). *Je-li f po částech spojitá a omezená funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ a F je primitivní funkce k f v $\langle a, b\rangle$, pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[\,F(x)\,\big]_a^b \qquad \big(= F(b) - F(a)\big).$$

Příklady. Vypočítejte určité integrály (pokud existují).

1) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$ **2)** $\displaystyle\int_{-5}^5 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ **3)** $\displaystyle\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$ **4)** $\displaystyle\int_{-1}^2 (4x^3 - 2x^2 + x + 4)\,\mathrm{d}x$

Řešení: viz TABULE

Integrace per–partes v Riemannově integrálu.

Věta (o integraci per partes v Riemannově integrálu). *Předpokládejme, že funkce u a v mají spojité derivace v intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom*

$$\int_a^b u'v \,\mathrm{d}x \;=\; \big[uv\big]_a^b - \int_a^b uv' \,\mathrm{d}x.$$

Příklad. Vypočítejme $\displaystyle\int_{-2}^{1} 2x\,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

Užijeme integraci per–partes: $\left[\begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^x, & v = 2x \\ u = \mathrm{e}^x, & v' = 2 \end{array}\right]$. Dostáváme:

$$\int_{-2}^{1} 2x\,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \;=\; \big[2x\,\mathrm{e}^x\big]_{-2}^{1} - \int_{-2}^{1} 2\,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \;=\; 2\mathrm{e} - 2(-2)\mathrm{e}^{-2} - \big[2\mathrm{e}^x\big]_{-2}^{1}$$
$$=\; 2\mathrm{e} + 4\mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e} + 2\mathrm{e}^{-2} \;=\; 6\mathrm{e}^{-2}.$$

Další příklady: viz TABULE

Substituční metoda v Riemannově integrálu.

Věta (o integraci substitucí v Riemannově integrálu). *Nechť funkce g má spojitou derivaci v intervalu $\langle a, b \rangle$ a zobrazuje $\langle a, b \rangle$ do intervalu J. Nechť funkce f je spojitá v J. Potom*

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\, \mathrm{d}s.$$

Příklad. Vypočítejme $\displaystyle\int_0^3 \frac{s}{\sqrt{s+1}}\, \mathrm{d}s$.

Užijeme substituci: $\left[\begin{array}{ll} \sqrt{s+1} = x, & s = 0 \ \ldots \ x = 1, \\ \text{tj. } s = x^2 - 1, & s = 3 \ \ldots \ x = 2 \\ \mathrm{d}s = 2x\, \mathrm{d}x & \end{array}\right]$. Dostáváme:

$$\int_0^3 \frac{s}{\sqrt{s+1}}\, \mathrm{d}s = \int_1^2 \frac{x^2-1}{x}\, 2x\, \mathrm{d}x = \int_1^2 \left(2x^2 - 2\right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{2}{3}x^3 - 2x\right]_1^2$$

$$= \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 2 = \frac{14}{3} - 2.$$

Další příklady: viz TABULE

Riemannův integrál jako funkce horní meze.

Věta (Riemannův integrál jako funkce horní meze). *Předpokládejme, že f je integrovatelná funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak*

a) *funkce* $P(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *je spojitá v* $\langle a, b\rangle$,

b) *rovnost* $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$ *platí ve všech bodech* $x \in (a, b)$, *ve kterých je funkce* f *spojitá.*

Princip důkazu: viz TABULE

Poznámka. Výrok b) lze modifikovat i pro případy, kdy $x = a$ nebo $x = b$:

b)' *je-li f spojitá zprava v bodě a, pak* $P'_+(a) = f(a)$,

b)" *je-li f spojitá zleva v bodě b, pak* $P'_-(b) = f(b)$.

Odtud vidíme:

1) **Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak P je primitivní funkce k f v $\langle a, b\rangle$.**

2) **Výpočet určitého integrálu a derivování podle horní meze jsou inverzní (= opačné) operace.**

Důsledek: Je-li F nějaká (obecně jiná) primitivní funkce k f v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$F(x) \;=\; P(x) + C \qquad \text{pro } x \in \langle a, b\rangle.$$

Dosaďme $x = a$. Dostáváme: $F(a) = P(a) + C = C$.

Dosaďme $x = b$. Dostáváme: $F(b) = P(b) + C = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + F(a)$.

Odtud plyne: $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Což je odvození Leib.-Newt. formule.