Matematika I – přednáška 23

Shrnutí co bylo minule

Vybrané vlastnosti a výpočet Riemannova integrálu.

Co bude dnes

Některé další aplikace určitého integrálu.

Tyto slidy jsou na adrese
https://users.fs.cvut.cz/jan.valasek
(pro osobní potřeby, nenahrazuje přednášku ani skripta).

Matematika I – přednáška 23

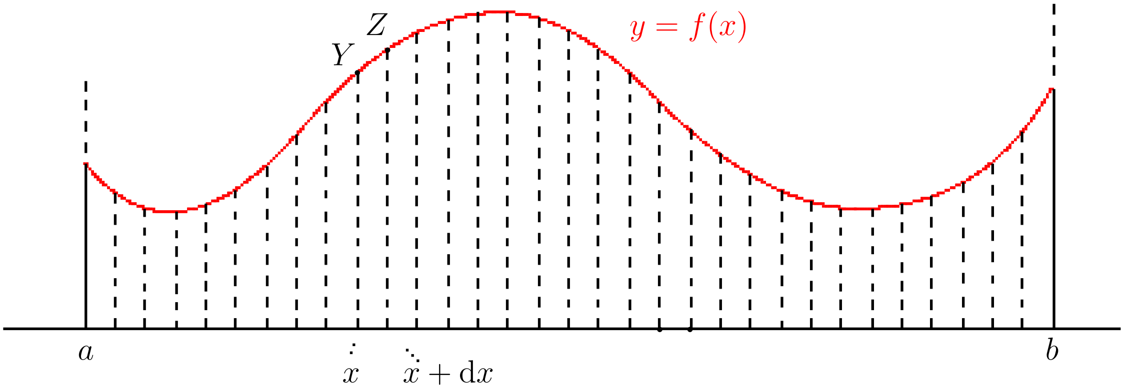
Již známe tyto aplikace určitého integrálu:

– výpočet obsahu plochy mezi grafem zadané funkce a osou x,

– výpočet hmotnosti tyče při zadané (obecně proměnné) délkové hustotě.

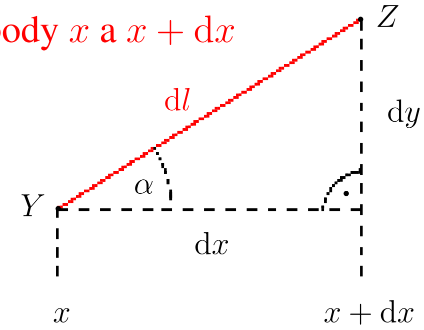
Některé další aplikace určitého integrálu

Délka křivky (grafu funkce).



Opět si představme, že interval $\langle a, b \rangle$ můžeme rozdělit na nekonečně mnoho „nekonečně krátkých" úseků o délce $\mathrm{d}x$. Podívejme se podrobněji na část grafu mezi body Y a Z.

část grafu funkce
$y = f(x)$ mezi
body x a $x + \mathrm{d}x$



Jelikož úsek mezi body x a $\mathrm{d}x$ je „nekonečně krátký”, můžeme část grafu funkce $y = f(x)$ na tomto úseku považovat za úsečku. Označme délku této úsečky $\mathrm{d}l$. Pomocí Pythagorovy věty dostáváme:

$$\mathrm{d}l \;=\; \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}.$$

$\mathrm{d}y$ vyjádříme: $\quad \mathrm{d}y = \operatorname{tg}\alpha \,\mathrm{d}x = f'(x)\,\mathrm{d}x$

Dostáváme:

$$\mathrm{d}l \;=\; \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + [f'(x)\,\mathrm{d}x]^2} \;=\; \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Délku celého grafu funkce $y = f(x)$ na úseku od a do b obdržíme sečtením všech hodnot $\mathrm{d}l$ pro x běžící od a do b, tj. integrací $\mathrm{d}l$ od a do b:

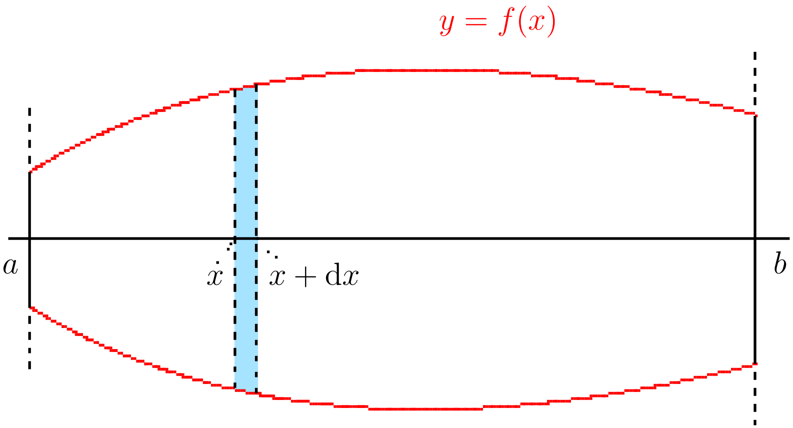
$$l \;:=\; \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad: viz TABULE

Objem rotačního tělesa.

Chceme definovat a vypočítat objem rotačního tělesa, jehož pláštěm je plocha vzniklá rotací grafu funkce f (v úseku od $x = a$ do $x = b$) okolo osy x.

Opět si představme, že interval $\langle a, b\rangle$ můžeme rozdělit na nekonečně mnoho „nekonečně krátkých” úseků o délce $\mathrm{d}x$.



Podívejme se podrobněji na úsek mezi x a $x + \mathrm{d}x$. Část rotačního tělesa na úseku od x do $x + \mathrm{d}x$ můžeme považovat za „nekonečně tenký” válec o poloměru $f(x)$ a výšce $\mathrm{d}x$. jeho objem je

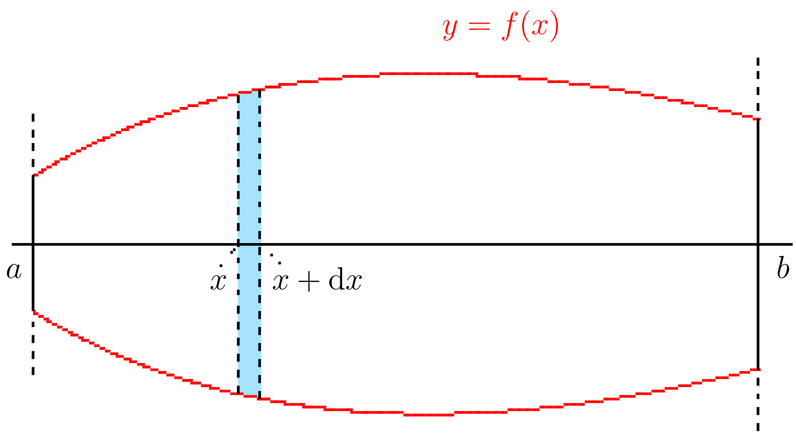
$$\mathrm{d}V = \pi\, f(x)^2\, \mathrm{d}x.$$

Objem celého tělesa pak je $V := \pi \int_a^b f(x)^2\, \mathrm{d}x.$ **Příklady:** viz TABULE

Hmotnost, statický moment, těžiště a moment setrvačnosti rotačního tělesa.

Označme B rotační těleso omezené plochou, vzniklou rotací grafu funkce f okolo osy x (v úseku od $x = a$ do $x = b$).

Předpokládejme, že těleso je z homogenního materiálu, takže jeho objemová hustota ρ je konstantní.

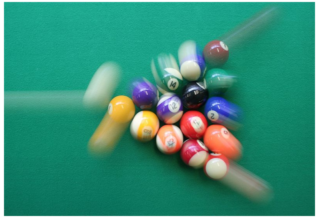


Hmotnost tělesa pak zřejmě je

$$M \;=\; \rho V = \pi\rho \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x.$$

Komentář k nekonstatní hustotě.

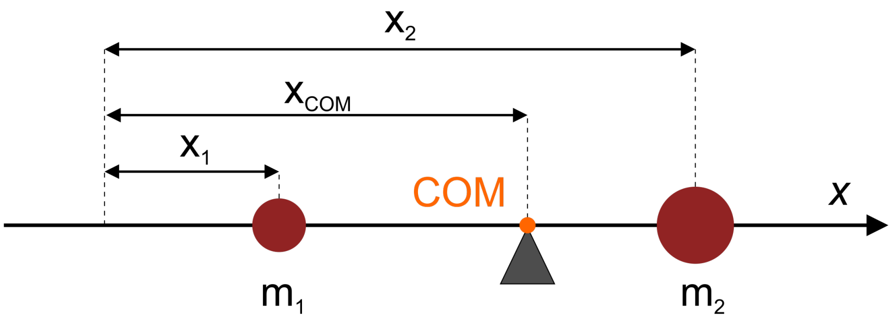
Anglická terminologie

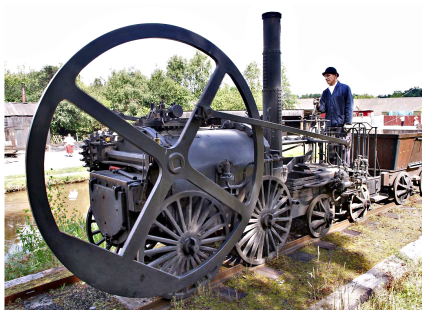


momentum = hybnost

moment = statický moment
center of mass = těžiště

moment of inertia = moment setrvačnosti
flywheel = setrvačník





Statický moment tělesa B (vzhledem k rovině kolmé k ose x a protínající ji v bodě x_0):

Označme zmíněnou rovinu σ_{x_0}.

Znovu si představme, že interval $\langle a, b \rangle$ můžeme rozdělit na nekonečně mnoho „nekonečně krátkých" úseků o délce $\mathrm{d}x$. Část tělesa B na úseku od x do $x + \mathrm{d}x$ opět považujeme za „nekonečně tenký" válec o poloměru $f(x)$ a výšce $\mathrm{d}x$. Jeho hmotnost je

$$\mathrm{d}M \;=\; \pi\rho\, f(x)^2\, \mathrm{d}x.$$

Jeho statický moment vzhledem k rovině σ_{x_0} je

$$\mathrm{d}M_{x_0} \;=\; (x - x_0) \cdot \mathrm{d}M \;=\; (x - x_0) \cdot \pi\rho\, f(x)^2\, \mathrm{d}x.$$

Celkový statický moment vzhledem k rovině σ_{x_0} je

$$M_{x_0} \;=\; \int_a^b (x - x_0) \cdot \pi\rho\, f(x)^2\, \mathrm{d}x.$$

Těžiště tělesa B: nachází se v tom bodě x_T na ose x, kde statický moment tělesa B vzhledem k rovině σ_{x_T} je nulový. To znamená, že

$$0 \;=\; \int_a^b (x - x_T) \cdot \pi\rho\, f(x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Odtud plyne:

$$x_T \cdot \pi\rho \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b x \cdot \pi\rho\, f(x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

To znamená:

$$x_T \;=\; \frac{\displaystyle\int_a^b x\, f(x)^2 \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x} \;=\; \frac{\pi\rho}{M} \int_a^b x\, f(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

$$x_T \;=\; \frac{M_0}{M} \;=\; \frac{\text{statický moment vzhledem k rovině } \sigma_0}{\text{hmotnost tělesa } B}$$

Moment setrvačnosti tělesa B (vzhledem k ose x):

Moment setrvačnosti již zmíněného nekonečně tenkého válce, který je částí tělesa B na úseku od x do $x + \mathrm{d}x$, , vzhledem k ose x je

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2}\,(\mathrm{d}M)\,f(x)^2 = \frac{1}{2}\,\pi\rho\,f(x)^4\,\mathrm{d}x.$$

Celkový moment setrvačnosti tělesa B vzhledem k ose x je

$$J = \frac{1}{2}\,\pi\rho \int_a^b f(x)^4\,\mathrm{d}x.$$