# Matematika I – přednáška 24

## Shrnutí co bylo minule

Aplikace Riemannova integrálu.

## Co bude dnes

Nevlastní Riemannův integrál.

Tyto slidy jsou na adrese
https://users.fs.cvut.cz/jan.valasek
(pro osobní potřeby, nenahrazuje přednášku ani skripta).

## Nevlastní Riemannův integrál

V definici Riemannova integrálu $\int_a^b f \, \mathrm{d}x$ předpokládáme, že

(i) $\langle a, b\rangle$ *je omezený interval* a

(ii) *funkce $f$ je v tomto intervalu omezená.*

Definici Riemannova integrálu lze rozšířit na případy, kdy je buď integrační obor (interval), nebo integrand (funkce), nebo obojí neomezené. Příslušný integrál se pak nazývá *nevlastním integrálem.*

**Příklad.** Riemannův integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$ neexistuje, protože integrovaná funkce $1/x$ není omezená v intervalu $(0, 1)$. (Má v bodě 0 limitu zprava rovnou $\infty$.) Integrál $\displaystyle\int_t^1 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$ (pro $t > 0$) však již existuje a je roven $\big[\ln x\big]_t^1 = -\ln t$. Limita tohoto výsledku pro $t \to 0+$ také existuje a je rovna $+\infty$. Je tedy přirozené položit

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x := \lim_{t\to 0+} \int_t^1 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}t = \lim_{t\to 0+} (-\ln t) = +\infty.$$

Připomínáme, že čísla $a$ a $b$ se nazývají *meze* integrálu $\int_a^b f \ \mathrm{d}x$. ($a$ je dolní mez a $b$ je horní mez.)

Ta z obou mezí, která je nekonečná nebo funkce $f$ není omezená v jejím okolí, se nazývá *singulární mezí.*
Integrál $\int_0^1 1/x \ \mathrm{d}x$ z posledního příkladu je tedy integrálem se singulární dolní mezí. Tento příklad je motivací k definici:

**Definice (Nevlastní Riemannův integrál se singulární dolní mezí).** Předpokládejme, že alespoň jedna z podmínek (i) a (ii) není splněna, ale Riemannův integrál funkce $f$ existuje v každém intervalu typu $\langle t, b\rangle$ (pro $a < t < b$). Jestliže existuje limita

$$\lim_{t\to a+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pak její hodnotu nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem se singulární dolní mezí.*

**Značení:** stejné, jako u „běžného" Riemannova integrálu, tj. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Můžeme tedy psát: $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{t\to a+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nevlastní Riemannův integrál *se singulární horní mezí* lze definovat analogicky:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{s\to b-} \int_a^s f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(pokud limita vpravo existuje).}$$

**Poznámka.** Na rozdíl od „běžného" Riemannova integrálu, hodnota nevlastního Riemannova integrálu může být i nekonečná. Pokud je nevlastní integrál konečný, pak říkáme, že *integrál konverguje.* Pokud je nevlastní integrál nekonečný, pak říkáme, že *diverguje.*

**Definice (Nevlastní Riemannův integrál s oběma mezemi singulárními).** Předpokládejme, že $c \in (a, b)$ a oba integrály $\int_a^c f \, \mathrm{d}x$ a $\int_c^b f \, \mathrm{d}x$ existují (první jako nevlastní integrál se singulární dolní mezí $a$ a druhý jako nevlastní integrál se singulární horní mezí $b$). Jestliže součet obou integrálů má smysl, pak pokládáme

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Integrál $\int_a^b f \, \mathrm{d}x$ je pak *nevlastním integrálem s oběma mezemi singulárními.*

**Výpočet nevlastního Riemannova integrálu.** Předpokládejme, že funkce $f$ je spojitá v intervalu $(a,b)$ a $F$ je primitivní funkcí k $f$ v $(a,b)$. Riemannův integrál (vlastní nebo nevlastní) funkce $f$ v intervalu $(a,b)$ existuje a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x),$$

pokud výraz na pravé straně má smysl (tj. pokud obě limity existují a rozdíl jejich hodnot má smysl).

**Příklady.** Vypočítejme nevlastní Riemannovy integrály:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

d) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$ e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_{0}^{5} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

**Návod k řešení:** viz TABULE