Matematika I – přednáška 4

Shrnutí co bylo minule

Matice, hodnost matice, Gaussův algoritmus.

Co bude dnes

Determinant, regulární a singulární matice. Inverzní matice.

Tyto slidy jsou na adrese
https://users.fs.cvut.cz/jan.valasek
(pro osobní potřeby a nenahrazuje skripta ani přednášku).

Matematika I – přednáška 4

Zabýváme se otázkou, jak určit hodnost obecné matice.

Na minulé přednášce byly vysvětleny tzv. ekvivalentní úpravy matice, které nemění hodnost matice.

Pomocí ekvivalentních úprav převedeme jakoukoliv matici na horní trojúhelníkovou matici s nenulovými prvky na hlavní diagonále. Hodnost takové matice již umíme určit. (Hodnost je rovna minimu z počtu řádků a sloupců, což je stejné číslo jako počet nenulových řádků.)

Postup, jak pomocí ekvivalentních úprav převést libovolnou matici na horní trojúhelníkovou matici (s nenulovými prvky na hlavní diagonále), se nazývá **Gaussův algoritmus.**

Vysvětlení a příklady: viz TABULE $\boxed{\text{T4.1}}$

Definice (determinant). Nechť A je <u>čtvercová</u> matice. *Determinantem* matice A nazýváme číslo, které označujeme $\det A$ a které lze matici A přiřadit podle těchto pravidel:

a) Je-li $A = (a)$ čtvercová matice typu 1×1, pak $\det A = a$.

b) Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice typu $n \times n$ (pro $n > 1$), vybereme libovolný řádek matice A (označíme jej jako i–tý) a položíme

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in},$$

kde A_{ij} je tzv. *doplněk prvku a_{ij}* v matici A. Tento doplněk je roven $(-1)^{i+j} \cdot A^*_{ij}$, kde A^*_{ij} je determinant čtvercové matice typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z matice A vynecháním i–tého řádku a j–tého sloupce.

Takže máme:

$$\det A = a_{i1} (-1)^{i+1} A^*_{i1} + a_{i2} (-1)^{i+2} A^*_{i2} + \ldots + a_{in} (-1)^{i+n} A^*_{in}.$$

Tomuto součtu říkáme *rozvoj determinantu podle i–tého řádku*.

Příklad: viz TABULE $\boxed{\text{T4.2}}$

Snadno ověříme, že pro čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ *typu* 2×2 *platí:*

$$\det A \;=\; a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Rozvojem determinantu podle některého řádku nebo sloupce převedeme otázku výpočtu determinantu matice typu $n \times n$ na otázku výpočtu n determinantů matic typu $(n-1) \times (n-1)$. Takto lze pokračovat, až se dostaneme k maticím typu 2×2.

Determinant matice $A = (a_{ij})$ často zapisujeme podobně jako matici A, pouze místo kulatých závorek používáme svislé čáry.

Nezáleží na tom, podle kterého řádku determinant rozvíjíme, vždy dospějeme ke stejnému výsledku.

Determinant lze dokonce rozvíjet i podle libovolného sloupce, výsledek je opět stejný.

Příklad: viz TABULE $\boxed{\text{T4.3}}$

Sarussovo pravidlo. Při výpočtu determinantů matic typu 3×3 lze kromě rozvoje podle některého řádku či sloupce použít ještě tzv. *Sarussovo pravidlo:*

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} - \\ &\quad - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}.\end{aligned}$$

Vzorec si můžete zapamatovat pomocí tohoto schématu:

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \end{matrix} \end{array}$$

$-$ $+$

Příklad: viz TABULE $\boxed{\text{T4.4}}$

Geometrický význam determinantu čtvercové matice A typu $n \times n$.

a) $n = 2$: Řádky matice A ... vektory $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. Doplňme v rovině $\mathbb{E}_2$ oba vektory na rovnoběžník. Pak plošný obsah rovnoběžníku je roven $|\det A|$.

b) $n = 3$: Řádky matice A ... vektory $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Doplňme v $\mathbb{E}_3$ tyto vektory na rovnoběžnostěn. Pak objem tohoto rovnoběžnostěnu je roven $|\det A|$.

c) Obecné $n \in N$: Řádky matice A ... vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Doplňme v $\mathbb{E}_n$ tyto vektory na n–rozměrný rovnoběžnostěn. Pak n–rozměrný objem tohoto rovnoběžnostěnu je roven $|\det A|$.

Tvrzení a), b), c) zůstávají v platnosti, pracujeme-li se sloupci matice A místo s řádky.

Poznámka. *Determinant jednotkové matice typu $n \times n$ (pro libovolné $n \in \mathbb{N}$) je roven 1.*

Obecněji: *Determinant čtvercové matice, která má buď pod hlavní diagonálou nebo nad ní samé nuly je roven součinu prvků na hlavní diagonále.*

Příklad: viz TABULE $\boxed{\text{T4.5}}$

Důležité vlastnosti determinantu (čtvercové matice A typu $n \times n$, kde $n > 1$):

a) *Obsahuje-li některý řádek (nebo sloupec) matice A samé nuly, je* $\det A = 0$.

b) $\det A = \det A^T$

c) *Vyměníme-li v matici A navzájem dva řádky (nebo sloupce), pak determinant změní znaménko (tj. determinant nové matice roven* $-\det A$*).*

d) *Jsou-li dva řádky (nebo sloupce) v matici A stejné, je* $\det A = 0$.

e) *Vynásobíme-li některý řádek (nebo sloupec) matice A číslem λ, je determinant nové matice roven* $\lambda \cdot \det A$.

f) *Je-li některý řádek (respektive sloupec) matice A násobkem jiného řádku (respektive sloupce), je* $\det A = 0$.

g) *Je-li některý řádek (respektive sloupec) matice A lineární kombinací ostatních řádků (respektive sloupců), je* $\det A = 0$.

h) *Determinant se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku (respektive sloupci) lineární kombinaci ostatních řádků (respektive sloupců).*

i) *Jsou-li A a B čtvercové matice stejného typu, je* $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Definice (regulární a singulární matice). Čtvercovou matici typu $n \times n$, která má maximální možnou hodnost (tj. n) nazýváme *regulární maticí*.

Čtvercovou matici, která není regulární, nazýváme *singulární maticí*.

Definice (inverzní matice). Předpokládejme, že A a E jsou čtvercové matice typu $n \times n$, přičemž E je jednotková matice. Čtvercovou matici A^{-1} typu $n \times n$ nazýváme *inverzní maticí* k matici A, jestliže platí

$$A \cdot A^{-1} = E.$$

Příklad: Ověřte, zda $\begin{pmatrix} 1, & -2 \\ -2, & 5 \end{pmatrix}$ je inverzní maticí k matici $\begin{pmatrix} 5, & 2 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}$ – viz TABULE

$\boxed{\text{T4.6}}$

Poznámka. Inverzní matice A^{-1} <u>nemusí existovat</u>! Příklad: viz TABULE $\boxed{\text{T4.7}}$

Pomocí následující věty lze mimo jiné zjistit, zda inverzní matice k matici A existuje či nikoliv.

Věta. *Nechť A je čtvercová matice. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

a) *Matice A je regulární.*

b) $\det A \neq 0$.

c) *Inverzní matice A^{-1} k matici A existuje.*

Poznámka. Ekvivalentní jsou i negace výroků a), b), c):

non a) *Matice A je singulární.*

non b) $\det A = 0$.

non c) *Inverzní matice A^{-1} k matici A neexistuje.*

Příklad: viz TABULE $\boxed{\text{T4.8}}$

Výpočet inverzní matice (pokud existuje). 1) Lze užít vzorec

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11}, & \dots, & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1}, & \dots, & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

kde A_{ij} jsou doplňky prvků a_{ij} v matici A.

Příklad: viz TABULE $\boxed{\text{T4.9}}$

2) Pro větší matice je užití výše uvedeného vzorce velmi pracné, vzhledem k pracnosti výpočtů hodnot A_{11}, A_{12}, $\dots$. K výpočtu inverzní matice A^{-1} k regulární čtvercové matici A lze ale použít i jinou, méně pracnou metodu, založenou na podobném postupu jako je Gaussův algoritmus. Tuto metodu vysvětlíme na příkladu:

Buď $A = \begin{pmatrix} 3, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \\ 9, & 3, & 1 \end{pmatrix}$. Například užitím Sarussova pravidla vypočítáme $\det A = -1$.

Jelikož determinant je nenulový, inverzní matice A^{-1} existuje. Tuto inverzní matici je možné vypočítat takto:

Napíšeme matici A a vedle ní napíšeme jednotkovou matici stejného typu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3, & 1, & 0 & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 1 & 0, & 1, & 0 \\ 9, & 3, & 1 & 0, & 0, & 1 \end{array}\right).$$

S řádky takto rozšířené matice provádíme úpravy, které již známe z vyšetřování hodnosti matice. Jedná se zejména o

- *změnu pořadí řádků,*
- *vynásobení některého řádku nenulovým číslem,*
- *přičtení násobku nějakého řádku k jinému řádku.*

Cílem je získat vlevo od svislé čáry jednotkovou matici. To, co nám vyjde vpravo od svislé čáry, bude inverzní matice A^{-1}.

Konkrétní výpočet: viz TABULE $\boxed{\text{T4.10}}$

Vektorový součin vektoru v $\mathbb{E}_3$.

Definice (Vektorový součin). Nechť $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ jsou vektory v $\mathbb{E}_3$. *Vektorovým součinem* vektoru $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (v tomto pořadí) nazýváme vektor, který značíme $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ a pro který platí:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ u_1, & u_2, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\,\mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\,\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\,\mathbf{k}.$$

II.1.8. Veta. *Jsou-li* $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$ *nenulové vektory v* $\mathbb{E}_3$ *a je-li* φ *úhel, který tyto vektory svírají, pak*

a) *Vektor* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *je kolmý k obema vektorum* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

b) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,\sin\varphi$.

Další důležité věty o regulárních a inverzních maticích:

Věta. *Jsou-li A a B regulární matice téhož typu, je matice $A \cdot B$ rovněž regulární. Platí:* $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Důkaz: viz TABULE $\boxed{T4.11}$

Věta. *Je-li A regulární matice, pak A^{-1} je také regulární matice a platí:*

a) $(A^{-1})^{-1} = A$, *b)* $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Důkaz: viz TABULE $\boxed{T4.12}$

Věta (o jednoznačnosti inverzní matice). *Pokud ke čtvercové matici A existuje inverzní matice A^{-1}, pak tato je určena jednoznačně.*

Důkaz: viz TABULE $\boxed{T4.13}$