Matematika I – přednáška 5

Shrnutí co bylo minule

Determinant matice, regulární a singulární matice, inverzní matice.

Co bude dnes

Soustavy lineárních algebraických rovnic (Frobeniova věta, Gaussova eliminace, Cramerovo pravidlo).

Tyto slidy jsou na adrese
https://users.fs.cvut.cz/jan.valasek
(pro osobní potřeby a nenahrazuje skripta ani přednášku).

I.3. Soustavy lineárních algebraických rovnic

Obecný tvar soustavy m lineárních algebraických rovnic pro n neznámých:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}} \tag{5.1}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{mn} \\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m \end{array}\right\}\ \text{zadaná reálná čísla}$$

$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ – neznámé

Při aplikacích matematiky je často nutné řešit soustavy mnoha set (nebo tisíc) lineárních algebraických rovnic pro mnoho set (nebo tisíc) neznámých.

Označení:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

A ... *matice soustavy* (= matice typu $m \times n$)

B ... *sloupec pravých stran* (= matice typu $m \times 1$)

X ... *sloupec neznámých* (= matice typu $n \times 1$)

Pomocí matic A, B, X můžeme soustavu (5.1) zapsat podstatně úspornějším způsobem:

$$\boxed{A \cdot X = B.} \tag{5.1}$$

Řešení soustavy (5.1): každá uspořádaná n–tice reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$, která soustavě vyhovuje.

Jsou-li všechna čísla $b_1, b_2, \dots, b_m$ rovna nule, nazýváme soustavu *homogenní*. V opačném případě nazýváme soustavu *nehomogenní*.

Homogenní soustavu můžeme úsporným způsobem zapsat:

$$\boxed{A \cdot X \ = \ O,} \tag{5.2}$$

kde O je nulová matice typu $m \times 1$.

Důležité otázky:

1) Má soustava (5.1) (nebo speciálně homogenní soustava (5.2)) vždy nějaké řešení, nebo se může stát, že neexistuje ani jedno řešení?

2) Pokud soustava má řešení, kolik jich je? Jakou má množina všech řešení strukturu? (Jinými slovy: je v množině všech řešení nějaký řád? Jaký řád?)

3) Jak lze všechna řešení soustavy (5.1) (nebo speciálně homogenní soustavy (5.2)) nalézt?

Začněme homogenní soustavou (5.2).

1) Jednoduché poznatky: *Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení, totiž řešení nulové* $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$ *(= tzv. triviální řešení).*

Některé homogenní soustavy již žádné další řešení nemají (tj. nulové řešení je jediným řešením), naopak některé jiné homogenní soustavy mají nekonečně mnoho řešení (mezi nimiž je jedno triviální řešení a ostatní jsou netriviální řešení).

Příklady: viz TABULE $\boxed{\text{T5.1}}$

2) Obecný poznatek:

Věta. *Množina všech řešení homogenní soustavy (5.2) je podprostorem n–rozměrného aritmetického prostoru $\mathbb{R}^n$. Dimenze tohoto podprostoru je $n - h(A)$.*

Důkaz první části věty: viz TABULE $\boxed{\text{T5.2}}$

3) Jak nalézt všechna řešení homogenní soustavy (5.2)?

Můžeme použít tzv. **Gaussovu eliminační metodu.**

Vysvětlení a příklady: viz TABULE $\boxed{\text{T5.3}}$

Nyní se zabývejme obecnou soustavou (5.1), která může být i nehomogenní.

K otázkám 1) – 3):

1) Jednoduché poznatky: *Soustava nemusí mít žádné řešení, může mít jediné řešení, může mít nekonečně mnoho řešení.* Příklady: viz TABULE $\boxed{\text{T5.4}}$

2) V obecném případě informaci o počtu řešení poskytuje tzv. Frobeniova věta. Označme

$$(A\,|\,B) \;=\; \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \qquad \dots \qquad \text{tzv. } \textit{rozšířená matice soustavy}$$

Věta (Frobeniova).

I. *Soustava lineárních algebraických rovnic (5.1) (pro n neznámých) má řešení právě tehdy, je-li $h(A) = h(A\,|\,B)$.*

II. *Je-li $h(A) = h(A\,|\,B) = n$, má soustava (5.1) jediné řešení.*
Je-li $h(A) = h(A\,|\,B) < n$, má soustava (5.1) nekonečně mnoho řešení.

Výhodou Frobeniovy věty je, že poskytuje informaci o počtu řešení soustavy (5.1), aniž soustavu řešíme.

Příklad: Vyšetřete, kolik řešení má v závislosti na parametru a soustava

$$\begin{array}{rcrcrcl} a\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & a\,x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & a\,x_3 & = & 1 \end{array}$$

Řešení: Souběžně vyšetříme hodnost matice soustavy a rozšířené matice soustavy.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a, & 1, & 1 & 1 \\ 1, & a, & 1 & 1 \\ 1, & 1, & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1, & a, & 1 & 1 \\ a, & 1, & 1 & 1 \\ 1, & 1, & a & 1 \end{array}\right) \sim {}^{*)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1, & a, & 1 & 1 \\ 0, & 1-a^2, & 1-a & 1-a \\ 0, & 1-a, & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

$^{*})$ 1. řádek násobíme $(-a)$ a přičteme ke 2. řádku. Poté 1. řádek odečteme od 3. řádku.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1, & a, & 1 & 1 \\ 0, & 1-a, & a-1 & 0 \\ 0, & 1-a^2, & 1-a & 1-a \end{array}\right) \sim {}^{**)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1, & a, & 1 & 1 \\ 0, & 1-a, & a-1 & 0 \\ 0, & 0, & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

$^{**})$ 2. řádek násobíme $1+a$ a odečteme od 3. řádku.

Nyní vidíme, že

a) Je-li $a \neq 1$ a $a \neq -2$, pak rovněž $1 - a \neq 0$ a $2 - a - a^2 \neq 0$. Hodnost matice soustavy i hodnost matice rozšířené jsou obě stejné a rovnají se 3, což je stejné jako počet neznámých. Soustava má tudíž jediné řešení.

b) Je-li $a = 1$, tak hodnost matice soustavy i hodnost matice rozšířené jsou obě stejné a rovnají se 1, což je menší, než je počet neznámých. Soustava má tudíž nekonečně mnoho řešení.

c) Je-li $a = -2$, tak $1 - a \neq 0$ a $2 - a - a^2 = 0$. Hodnost matice soustavy je 2 a hodnost rozšířené matice je 3. Jelikož tyto hodnosti jsou různé, soustava nemá žádné řešení.

3) Jak nalézt všechna řešení soustavy (5.1)?

Opět můžeme použít **Gaussovu eliminační metodu.**

Příklad: viz TABULE $\boxed{\text{T5.5}}$

V případě, kdy soustava (5.1) je soustavou n rovnic pro n neznámých a matice soustavy A je regulární, existuje jediné řešení. (Toto jednoduché tvrzení snadno odvodíme pomocí Frobeniovy věty.) V tomto speciálním případě lze k vyjádření řešení použít i tzv. **Cramerovo pravidlo:**

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

kde $\Delta = \det A$ a Δ_i je determinant čtvercové matice, která vznikne z matice A po nahrazení i–tého sloupce sloupcem pravých stran.

Příklad: viz TABULE $\boxed{\text{T5.6}}$