Matematika I – přednáška 6

Shrnutí co bylo minule

Soustavy rovnic, Frobeniova věta, Gaussova eliminace, Cramerovo pravidlo.

Co bude dnes

Vlastní čísla a vlastní vektory matic.

Tyto slidy jsou na adrese
https://users.fs.cvut.cz/jan.valasek
(pro osobní potřeby a nenahrazuje skripta ani přednášku).

Matematika I – přednáška 7

I.4. Vlastní čísla a vlastní vektory čtvercových matic

Motivace. Předpokládejme, že A je čtvercová matice typu $n \times n$. V této kapitole je výhodné vektorem rozumět matici typu $n \times 1$, jejíž složky mohou být i komplexní čísla.

V matematice i jejích aplikacích se často setkáváme s otázkou, zda existuje nenulový vektor X takový, že součin $A \cdot X$ je vektorem, ležícím na stejné přímce jako X.

Definice (vlastní číslo, vlastní vektor). Komplexní číslo λ nazýváme *vlastním číslem* čtvercové matice A existuje-li nenulový vektor X takový, že

$$\boxed{A \cdot X = \lambda X}.$$

Vektor X se nazývá *vlastním vektorem* matice A odpovídajícím vlastnímu číslu λ.

Poznámka. Vlastní vektor není určen jednoznačně, vždy je jich nekonečně mnoho. (Je–li X vlastní vektor, pak násobek X libovolným nenulovým číslem je také vlastní vektor.)

Jak vypočítáme vlastní čísla matice A?

$$A \cdot X = \lambda X \quad \Longleftrightarrow \quad A \cdot X - \lambda E \cdot X = O \quad \Longleftrightarrow \quad (A - \lambda E) \cdot X = O$$

Na maticovou rovnici $(A - \lambda E) \cdot X = O$ lze hledět jako na homogenní soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé složky vektoru X. Nenulové řešení X existuje právě když matice $A - \lambda E$ je singulární. Toto je splněno tehdy a jen tehdy, je-li

$$\boxed{\det(A - \lambda E) = 0.}$$

Tato rovnice pro neznámou λ je tzv. *charakteristická rovnice* matice A. Jejím řešením získáme vlastní čísla matice A.

Příklad: viz TABULE $\boxed{\text{T6.1}}$

Jak vypočítáme vlastní vektory matice A?

Vlastní vektory, odpovídající vlastnímu číslu λ, najdeme řešením homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\boxed{(A - \lambda E) \cdot X = O}$$

pro neznámé $x_1, \ldots, x_n$, což jsou složky vektoru X.

Příklad: viz TABULE $\boxed{\text{T6.2}}$

Další vlastnosti vlastních čísel a vlastních vektorů:

a) Vlastní vektory X_1, X_2 matice A, odpovídající různým vlastním číslům λ_1, λ_2, jsou lineárně nezávislé.

b) Matice A má vlastní číslo 0 právě když je singulární.

c) Je-li λ vlastním číslem matice A a X je příslušný vlastní vektor, pak $\overline{\lambda}$ je také vlastním číslem matice A a $\overline{X}$ je příslušným vlastním vektorem.

d) Je-li λ vlastním číslem matice A a X je příslušný vlastní vektor, pak λ^2 je vlastním číslem matice A^2 a X je opět příslušným vlastním vektorem.

e) Existuje-li inverzní matice A^{-1}, je λ vlastním číslem matice A právě když $1/\lambda$ je vlastním číslem matice A^{-1}. Odpovídající vlastní vektory jsou v tomto případě stejné.

*f) Je-li A symetrická čtvercová matice, pak všechna její vlastní čísla jsou reálná. Vlastní vektory, odpovídající různým vlastním číslům, jsou v tomto případě kolmé.

Závěrečná poznámka

Předpokládejme, že A je čtvercová matice typu $n \times n$. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:

1. Matice A je regulární.
2. $\det A \neq 0$.
3. Inverzní matice A^{-1} existuje.
4. Matice A má hodnost n.
5. Řádky matice A jsou lineárně nezávislé.
6. Sloupce matice A jsou lineárně nezávislé.
7. Homogenní soustava lineárních algebraických rovnic $A \cdot X = O$ má jediné (a to nulové) řešení.
8. Obecná (tj. homogenní nebo nehomogenní) soustava lineárních algebraických rovnic $A \cdot X = B$ má jediné řešení.
9. 0 není vlastním číslem matice A.