Matematika I – přednáška 7

Shrnutí co bylo minule

Vlastní čísla a vlastní vektory matic. (Konec první části (Lineární Algebra))

Co bude dnes

Základny reálných funkcí jedné reálné proměnné.

Tyto slidy jsou na adrese
https://users.fs.cvut.cz/jan.valasek
(pro osobní potřeby a nenahrazuje skripta ani přednášku).

II.1. Funkce – základní pojmy

Definice (funkce). Je-li $M \subset \mathbb{R}$, pak zobrazení f množiny M do $\mathbb{R}$ nazýváme *reálnou funkcí jedné reálné proměnné* (krátce pouze *funkcí*). Množinu M nazýváme *definičním oborem* funkce f, značíme $D(f)$.

Funkce označujeme i jinými písmeny. Například: g, h, φ, ψ, F, G, atd.
Někdy funkce popisujeme rovnicí $y = f(x)$, $y = g(x)$, apod.
V tomto případě nazýváme x *nezávisle proměnnou* a y *závisle proměnnou.*
(Pochopitelně, můžeme používat i jiná písmena než x a y.)

Obor hodnot funkce f: značíme $H(f)$

Graf funkce f: množina $G(f) := \{ [x, f(x)] \in \mathbb{R}^2;\ x \in D(f) \}$.

Jak zapisujeme konkrétní funkce? Například

a) $f: \quad y = 5x^2 + 3x - 2$ pro $x \in \langle -4, 4 \rangle$,

b) $f(x) = 5x^2 + 3x - 2$ pro $x \in \langle -4, 4 \rangle$, apod.

Poznámka. Je-li funkce zadaná pouze vzorcem, bez bližší specifikace definičního oboru, pak jejím definičním oborem automaticky rozumíme maximální množinu těch $x \in \mathbb{R}$, pro která má vzorec smysl.

Například, definujeme-li funkci f pouze vzorcem $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, pak jejím definičním oborem automaticky rozumíme množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která platí $1 - x^2 \geq 0$ (což je interval $\langle -1, 1 \rangle$).

Součtem funkcí f a g nazýváme funkci h takovou, že $h(x) = f(x) + g(x)$ pro $x \in D(f) \cap D(g)$. Používáme zápis: $h = f + g$.

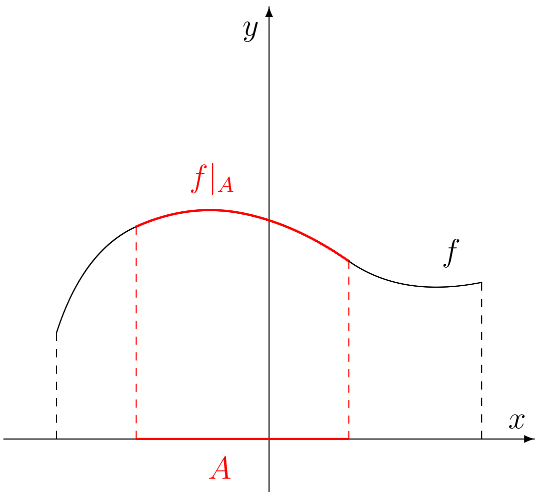
Analogicky definujeme i *rozdíl, součin a podíl funkcí* f a g. Definičním oborem podílu je však množina $[\, D(f) \cap D(g) \,] \smallsetminus \{x \in D(g);\ g(x) = 0\}$.

Absolutní hodnotou funkce f nazýváme funkci h takovou, že $h(x) = |f(x)|$ pro $x \in D(f)$. Píšeme: $h = |f|$.

Definice (restrikce funkce). Je-li f funkce a $A \subset D(f)$, pak funkci, definovanou pouze na A, která každému $x \in A$ přiřazuje tutéž hodnotu jako funkce f (tj. $f(x)$), nazýváme *restrikcí* funkce f na množinu A a značíme ji $f|_A$.

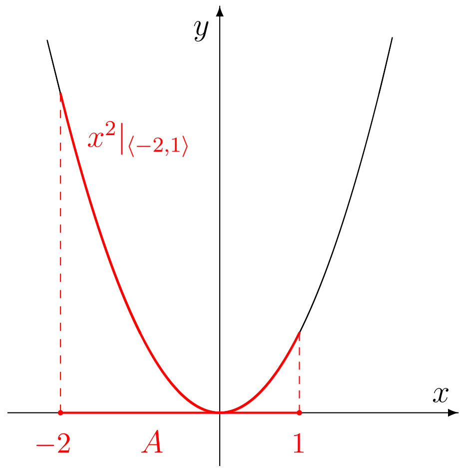
Obor hodnot funkce $f|_A$ značíme: $H(f|_A)$ nebo $f(A)$.

Obecný příklad:



Konkrétní příklad:

$f(x) = x^2$ pro $x \in (-\infty, \infty)$,
$A = \langle -2, 1 \rangle$



Definice (složená funkce). Jsou-li f a g funkce pro které platí $H(g) \subset D(f)$, lze definovat funkci h předpisem $h(x) = f(g(x))$ pro $x \in D(g)$. Funkci h nazýváme *složenou funkcí.*

Značení: $h = f \circ g$ nebo $h = f * g$ nebo $h(x) = f(g(x))$.

f ... *vnější funkce*
g ... *vnitřní funkce*

Příklady:

1) $y = (5x^2 + 3x - 2)^2$ ... $y = f(g(x))$,
kde $f(z) = z^2$ je vnější funkce a
$z = g(x) = 5x^2 + 3x - 2$ je vnitřní funkce

2) $y = 2^{3x+2}$ ... $y = f(g(x))$,
kde $f(z) = 2^z$ je vnější funkce a
$z = g(x) = 3x + 2$ je vnitřní funkce

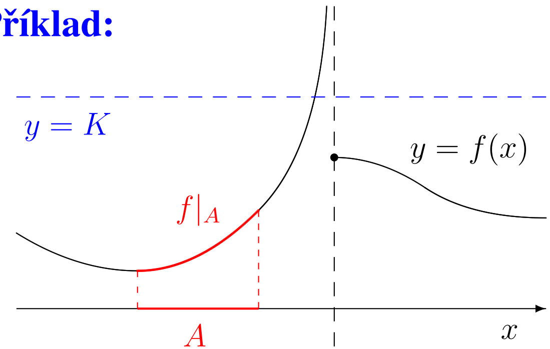
Definice (omezená funkce). Nechť $A \subset D(f)$. O funkci f říkáme, že je *shora omezená na množině A,* existuje-li $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in A$ platí: $f(x) \leq K$.

Analogicky, o funkci f říkáme, že je *zdola omezená na množině A,* existuje-li $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in A$ platí: $f(x) \geq L$.

Funkci f nazýváme *omezenou na množině A,* je-li f na množině A zároveň shora i zdola omezená.

Je-li $A = D(f)$, pak rčení „na množině A" vynecháváme a říkáme, že funkce f je *shora omezená,* nebo *zdola omezená,* nebo *omezená.*

Příklad:



Funkce f je shora omezená na množině A, není však shora omezená na celém svém definičním oboru.

Další příklady: viz TABULE

Definice (maximum funkce na množině). Předpokládejme, že $A \subset D(f)$. Říkáme, že funkce f nabývá v bodě $x_0 \in A$ svého *maxima na množině A,* jestliže pro všechna $x \in A$ platí: $f(x) \leq f(x_0)$. Píšeme: $f(x_0) = \max_A f$.

Další používaná označení maxima funkce f na množině A jsou: $\max\limits_{A} f$, $\max\limits_{x \in A} f(x)$.

Podobně lze definovat i *minimum funkce f na množině A.* Používáme pro ně označení: $\min_A f$, $\min\limits_{A} f$ nebo $\min\limits_{x \in A} f(x)$.

Je-li $A = D(f)$, pak rčení „na množině A" vynecháváme a mluvíme pouze o *maximu* nebo *minimu funkce f.*

Maximum a minimum funkce f nazýváme souhrnně *extrémy* funkce f.

Poznámka. Extrémy funkce na dané množině nebo na celém definičním oboru mohou, ale také nemusí existovat.

Příklady: viz TABULE

Definice (funkce rostoucí a klesající). Nechť f je funkce a $A \subset D(f)$. Funkci f nazýváme

– *rostoucí na množině A,* jestliže $\forall\, x_1, x_2 \in A: \ \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

– *klesající na množině A,* jestliže $\forall\, x_1, x_2 \in A: \ \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Je-li $A = D(f)$, pak rčení „na množině A" vynecháváme, a mluvíme pouze o funkci *rostoucí* nebo *klesající,* apod.

Příklady: viz TABULE

Definice (funkce neklesající a nerostoucí). Nechť f je funkce a $A \subset D(f)$. Funkci f nazýváme

– *neklesající na množině A,* jestliže $\forall\, x_1, x_2 \in A: \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \le f(x_2)$,

– *nerostoucí na množině A,* jestliže $\forall\, x_1, x_2 \in A: \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \ge f(x_2)$.

Příklady: viz TABULE

$$\left.\begin{array}{l}\text{funkce rostoucí}\\ \text{funkce klesající}\end{array}\right\}\ \text{funkce } \textit{ryze monotónní}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{funkce neklesající}\\ \text{funkce nerostoucí}\end{array}\right\}\ \text{funkce } \textit{monotónní}$$

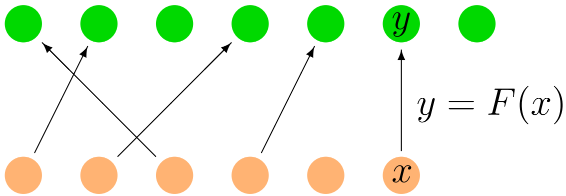
Motivace k pojmu inverzní funkce

Zobrazení F z množiny A do množiny B nazýváme *prosté*, jestliže pro $\forall\, x_1,\ x_2 \in D(F)$ platí implikace:

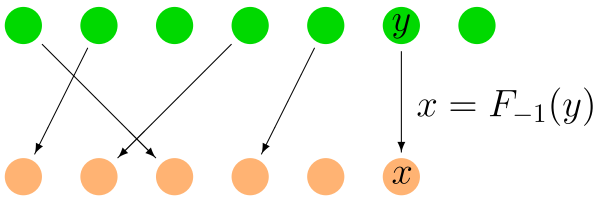
$$x_1 \neq x_2 \implies F(x_1) \neq F(x_2).$$

(Prosté zobrazení přiřazuje různým prvkům množiny A různé hodnoty v množině B.)

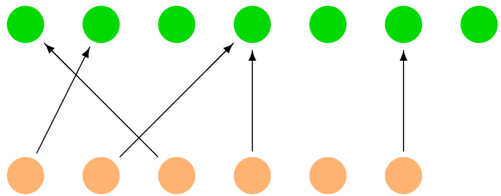
Příklad: prosté zobrazení F:



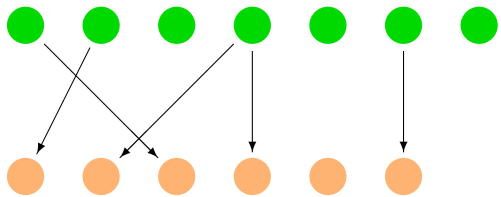
Inverzní zobrazení F_{-1}:



Příklad: toto zobrazení není prosté:



Inverzní zobrazení? NE!



Funkci f nazýváme *prostou*, jestliže pro $\forall\, x_1,\, x_2 \in D(f)$ platí implikace:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

(Prostá funkce nabývá v různých bodech různých hodnot.)

Příklady: viz TABULE

Definice (inverzní funkce). Předpokládejme, že funkce f je prostá. *Inverzní funkce* k funkci f je funkce, označovaná f_{-1}, pro kterou platí

$$\forall\, x \in D(f)\ : \quad y = f(x) \iff x = f_{-1}(y).$$

definiční obor inverzní funkce: $D(f_{-1}) = H(f)$
obor hodnot inverzní funkce: $H(f_{-1}) = D(f)$

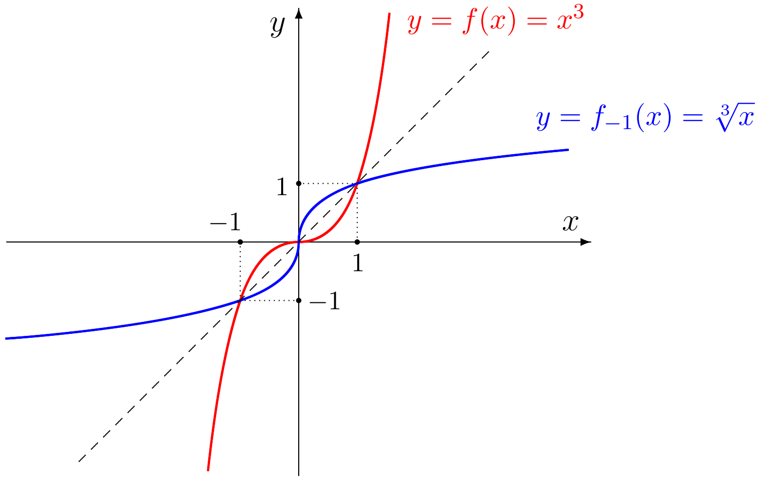
Poznámka: $f_{-1}(f(x)) = x$ pro $x \in D(f)$, $\quad f(f_{-1}(x)) = x$ pro $x \in D(f_{-1})$

Tvar inverzní funkce získáme takto: z rovnice $y = f(x)$ vypočítáme x (pokud to jde). Obdržíme: $x = f_{-1}(y)$. Poté zaměníme x a y (neboť nezávisle proměnnou obvykle značíme x a závisle proměnnou y). Dostaneme: $y = f_{-1}(x)$. **Příklad:** TABULE

Poznámka. Grafy funkcí f a f_{-1} jsou souměrné podle osy 1. a 3. kvadrantu.

Vysvětlení: viz TABULE

Příklad: grafy funkcí $f(x) = x^3$ a $f_{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$



Věta. *Je-li f rostoucí funkce, je inverzní funkce f_{-1} také rostoucí.*

Stejná věta platí i pro funkce klesající.

Definice (funkce sudá a lichá). Funkci f nazýváme *sudou,* jestliže pro každé $x \in D(f)$ patří $-x$ rovněž do $D(f)$ a $f(-x) = f(x)$.
Funkci f nazýváme *lichou,* jestliže pro každé $x \in D(f)$ patří $-x$ rovněž do $D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$.

Poznámka. Graf funkce sudé je souměrný podle osy y a graf funkce liché je souměrný podle počátku.

Příklady: viz TABULE

Definice (funkce periodická). Funkci f nazýváme *periodickou s periodou* ω, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí: $x \pm \omega$ patří rovněž do $D(f)$ a $f(x \pm \omega) = f(x)$.

Příklady: viz TABULE

Vybrané konkrétní funkce

Elementární funkce (známé ze střední školy):

a) *konstantní funkce:* $f(x) = c$ (kde $c \in \mathbb{R}$)

b) *lineární funkce:* $f(x) = kx + q$ (kde $k, q \in \mathbb{R}$ a $k \neq 0$)

c) *kvadratická funkce:* $f(x) = ax^2 + bx + c$ (kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $a \neq 0$)

d) *mocninná funkce:* $f(x) = x^\alpha$ (kde $\alpha \in \mathbb{R}$)

e) *funkce sinus:* $f(x) = \sin x$

f) *funkce kosinus:* $f(x) = \cos x$

g) *funkce tangens:* $f(x) = \operatorname{tg} x$

h) *funkce kotangens:* $f(x) = \operatorname{cotg} x$

i) *exponenciální funkce o základu a* (kde $a > 0$): $f(x) = a^x$

j) *logaritmická funkce o základu a* (kde $a > 0$, $a \neq 1$): $f(x) = \log_a x$

Zopakujte si sami, jak vypadají definiční obory těchto funkcí, obory hodnot, grafy, atd.

Polynomy

Polynom stupně n má obecný tvar

$$P_n(x) \;=\; a_n\, x^n \;+\; a_{n-1}\, x^{n-1} \;+\; a_{n-2}\, x^{n-2} \;+\; \ldots \;+\; a_1\, x \;+\; a_0,$$

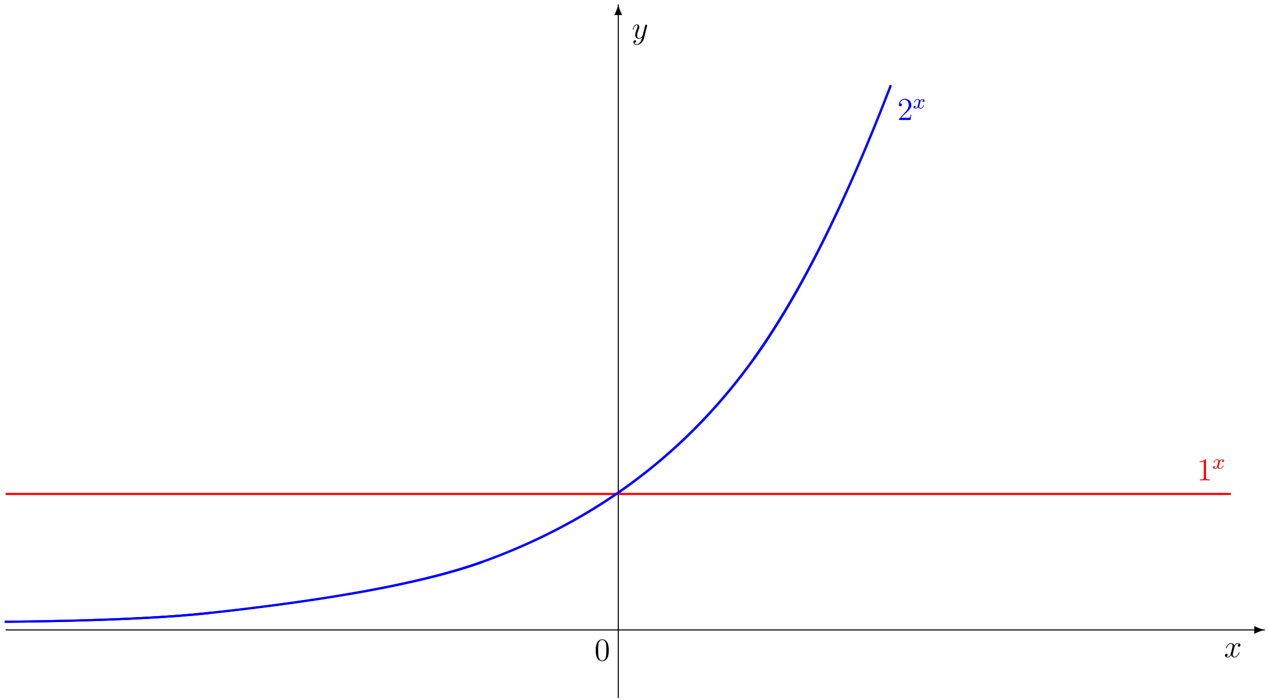
kde $a_n,\ a_{n-1}, \ldots,\ a_0$ jsou reálná čísla a $a_n \neq 0$.

Speciálně:

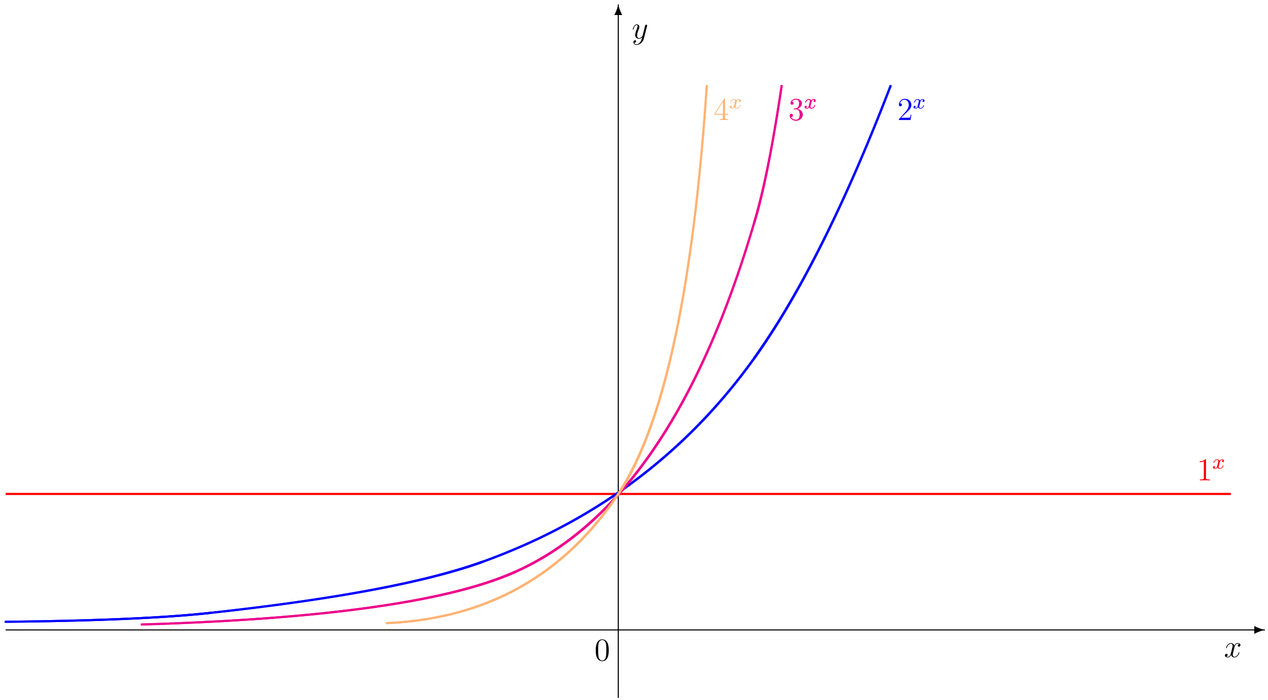
$n = 0:$	$P_1(x) = a_0$	*konstantní funkce*	graf: přímka rvnoběžná s osou x
$n = 1:$	$P_1(x) = a_1 x + a_0$	*lineární funkce*	graf: přímka
$n = 2:$	$P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	*kvadratická funkce*	graf: parabola
$n = 3:$	$P_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	*kubická funkce*	graf: kubická parabola

Průsečíky grafu s osou x ... *kořeny* polynomu.

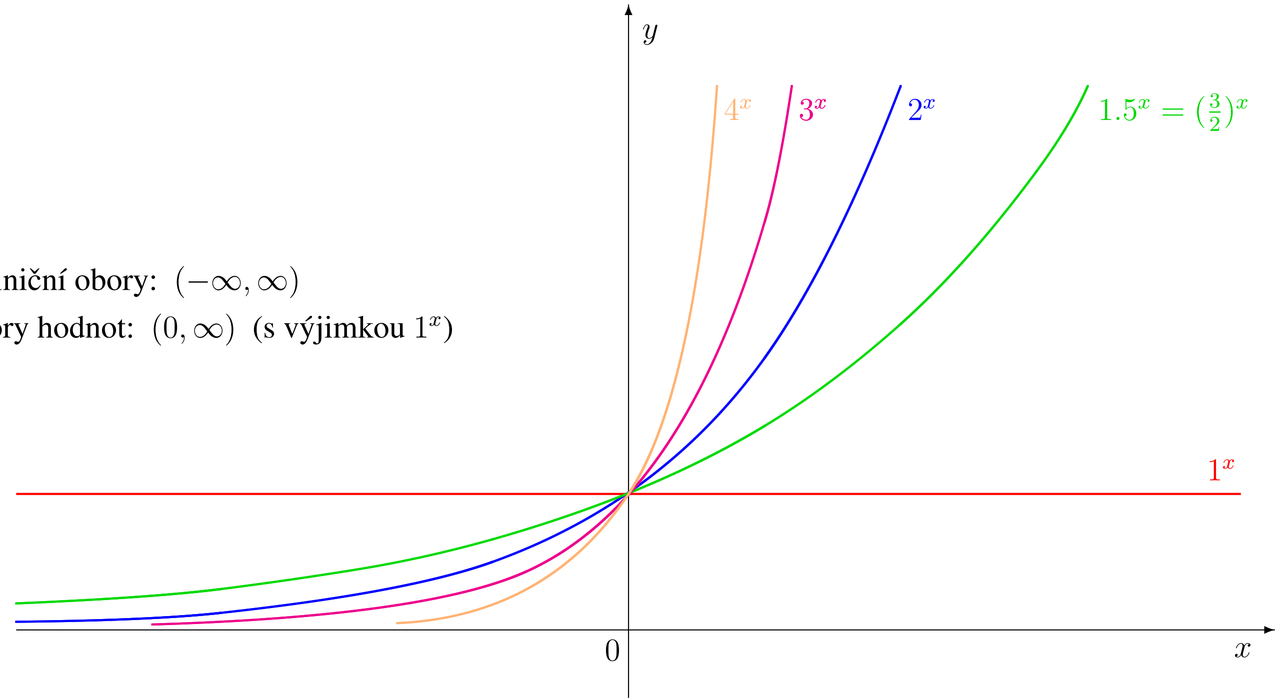
Příklady exponenciálních funkcí a^x pro různá $a \geq 1$



Příklady exponenciálních funkcí a^x pro různá $a \geq 1$



Příklady exponenciálních funkcí a^x pro různá $a \geq 1$

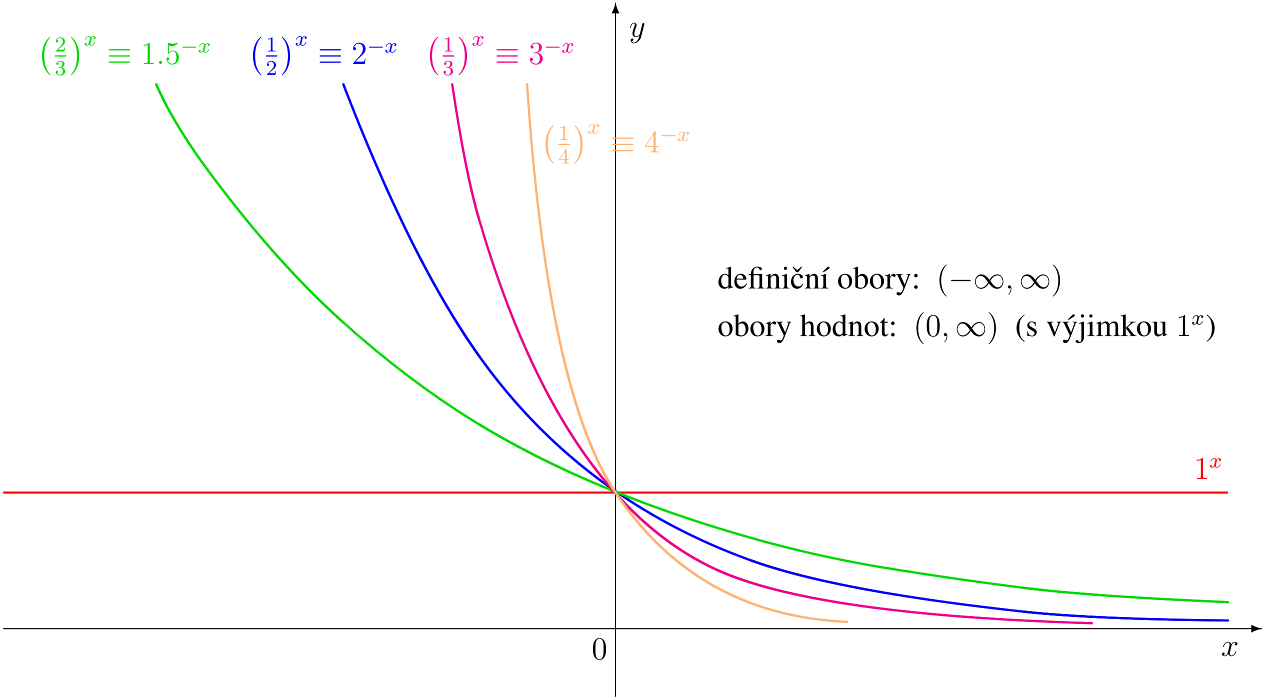


definiční obory: $(-\infty, \infty)$

obory hodnot: $(0, \infty)$ (s výjimkou 1^x)

Grafy se protínají v bodě $[0, 1]$.

Příklady exponenciálních funkcí a^x pro různá $a \in (0,1\rangle$

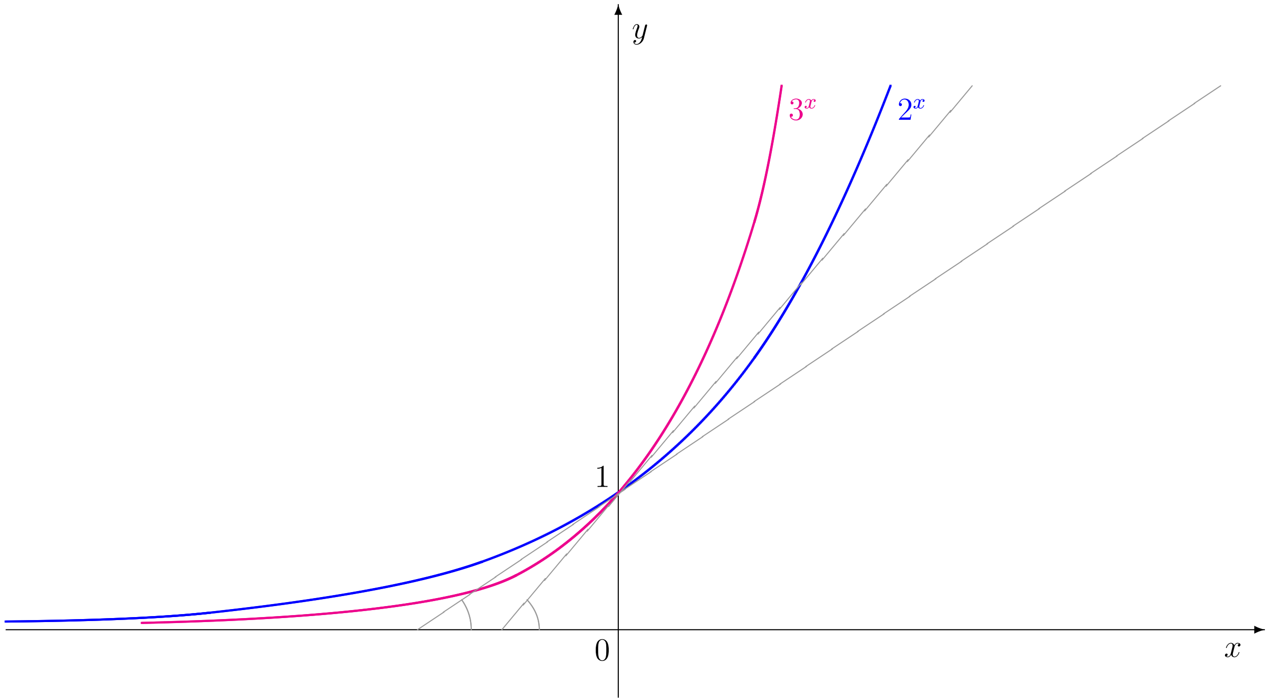


definiční obory: $(-\infty, \infty)$

obory hodnot: $(0, \infty)$ (s výjimkou 1^x)

Grafy se protínají v bodě $[0, 1]$.

Exponenciální funkce 2^x a 3^x s tečnami v bodě $[0,1]$

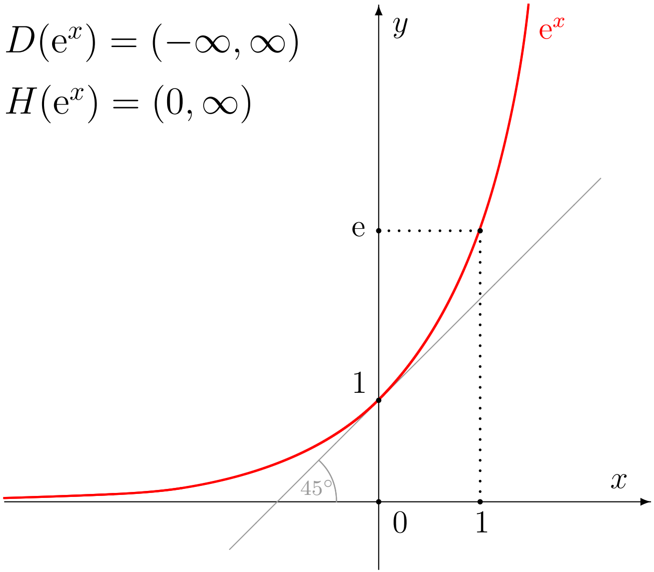


Tečny v bodě $[0,1]$ svírají s osou x různé úhly.

Eulerovo číslo e, exponenciální funkce e^x

$D(\mathrm{e}^x) = (-\infty, \infty)$

$H(\mathrm{e}^x) = (0, \infty)$



Ze všech exponenciálních funkcí a^x je „nejdůležitější” funkce e^x, kde e je tzv. *Eulerovo číslo*. Toto číslo je vybráno tak, že tečna ke grafu funkce e^x v bodě $[0, 1]$ svírá s osou x úhel $45°$. Číslo e je iracionální a jeho hodnota je $2,71828\ldots$.

Místo e^x se často píše $\exp x$.

V minulosti byla odvozena řada vzorců, kterými lze e vyjádřit. Například:

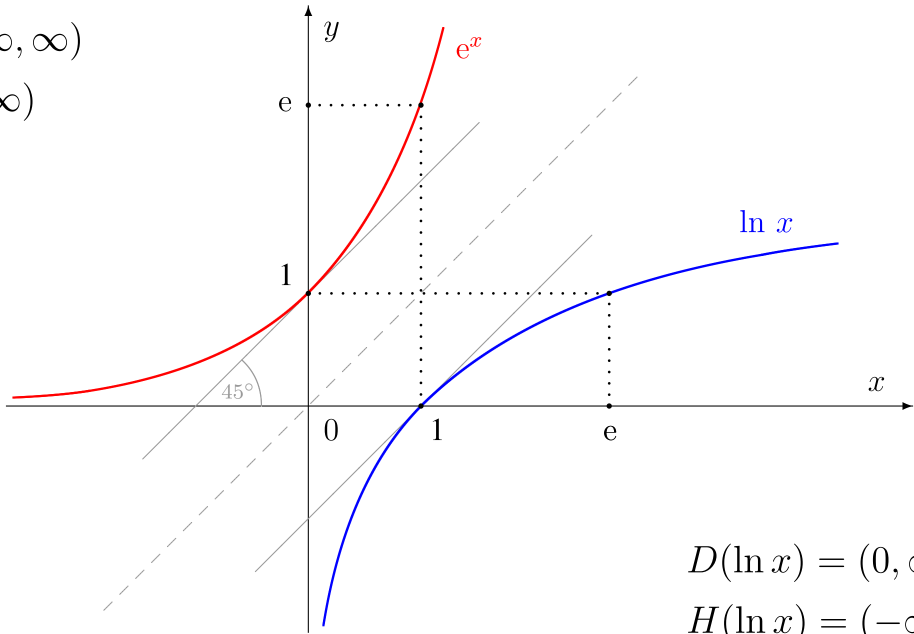
$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{nebo} \qquad \mathrm{e} = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots.$$

Přirozený logaritmus: inverzní funkce k funkci e^x

Místo $\log_{\mathrm{e}} x$ se používá označení $\log x$ nebo $\ln x$.

$D(\mathrm{e}^x) = (-\infty, \infty)$

$H(\mathrm{e}^x) = (0, \infty)$



$D(\ln x) = (0, \infty)$

$H(\ln x) = (-\infty, \infty)$

Mocninná funkce

Obecná mocninná funkce x^α je definovaná vzorcem

$$x^\alpha \;=\; \mathrm{e}^{\ln x^\alpha} \;=\; \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \qquad \text{(pro } x > 0 \text{ a } \alpha \in \mathbb{R}\text{)}.$$

Její definiční obor tudíž je: $D(x^\alpha) = (0, \infty)$.

Pro některé speciální exponenty α však lze funkci x^α přirozeným způsobem rozšířit na interval $\langle 0, \infty)$ nebo na množinu $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ nebo dokonce na interval $(-\infty, \infty)$.

Příklady:

a) $\alpha = 2 \;\ldots\; x^\alpha = x^2,$ $\quad D(x^2) = (-\infty, \infty)$

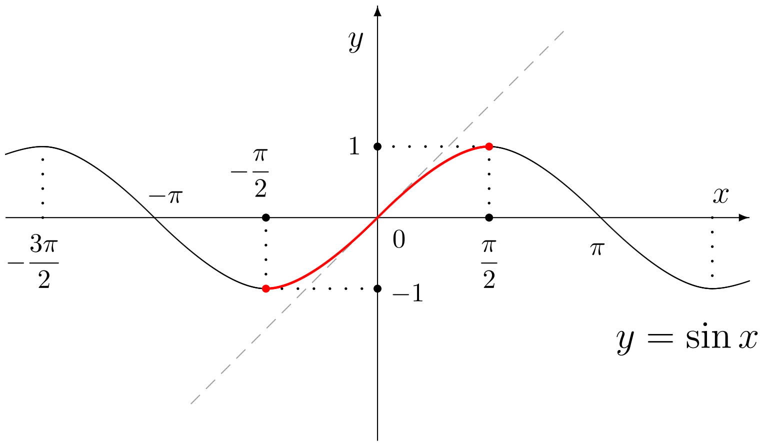
b) $\alpha = \frac{1}{2} \;\ldots\; x^\alpha = x^{1/2} = \sqrt{x},$ $\quad D(\sqrt{x}) = \langle 0, \infty)$ $\quad$ (inverzní funkce k $x^2|_{\langle 0,\infty)}$)

c) $\alpha = \frac{1}{3} \;\ldots\; x^\alpha = x^{1/3} = \sqrt[3]{x},$ $\quad D(\sqrt{x}) = \langle -\infty, \infty)$ $\quad$ (inverzní funkce k x^3)

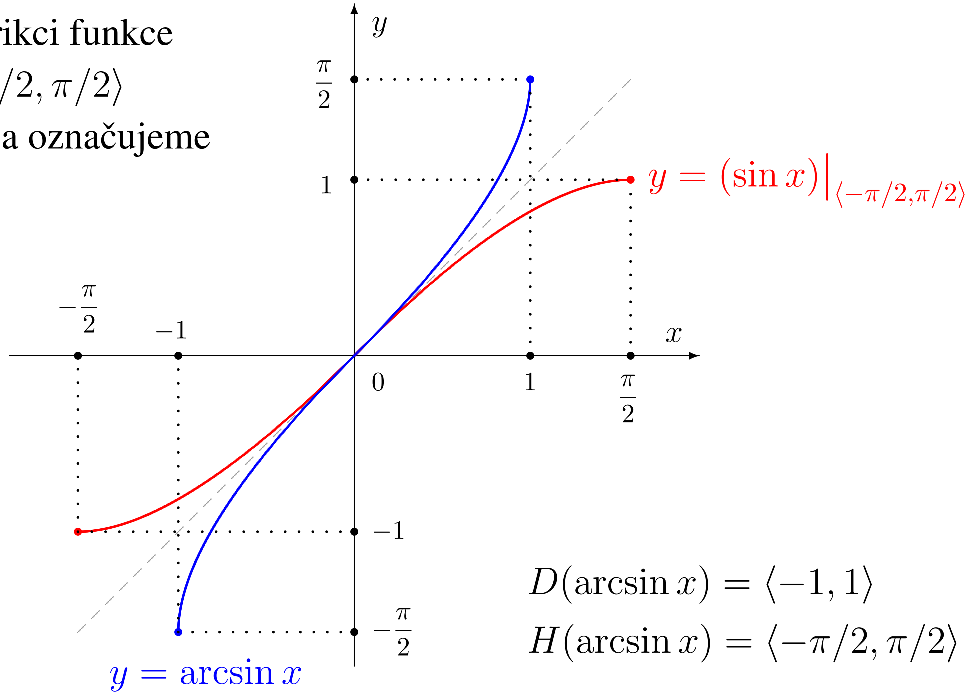
d) $\alpha = \frac{2}{3} \;\ldots\; x^\alpha = x^{2/3} = (x^{1/3})^2,$ $\quad D(x^{2/3}) = (-\infty, \infty)$

e) $\alpha = -1 \;\ldots\; x^\alpha = x^{-1} = \dfrac{1}{x},$ $\quad D(x^{-1}) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Cyklometrická funkce $\arcsin x$ (arkussinus). Funkce sinus není prostá. Inverzní funkce k sinu tudíž neexistuje. Restrikce funkce sinus na interval $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ však prostá již je.



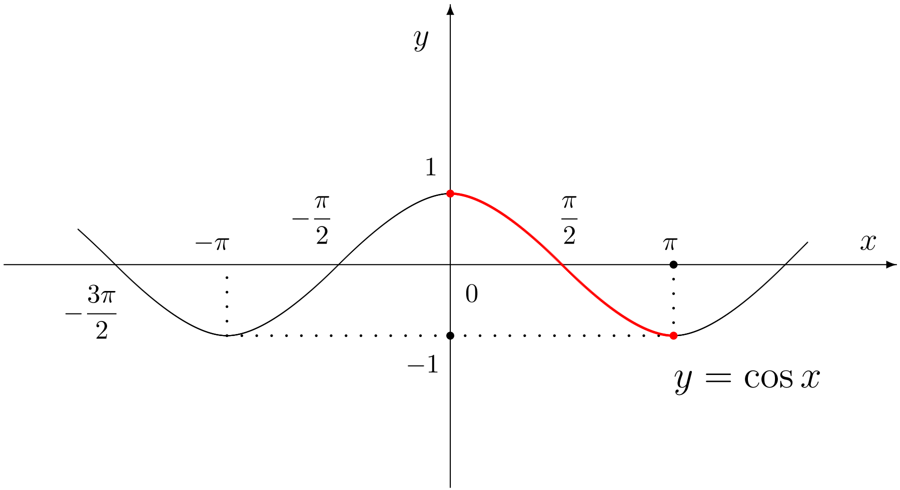
Inverzní funkci k restrikci funkce sinus na interval $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ nazýváme *arkussinus* a označujeme ji arcsin.



$$D(\arcsin x) = \langle -1, 1\rangle$$
$$H(\arcsin x) = \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$$

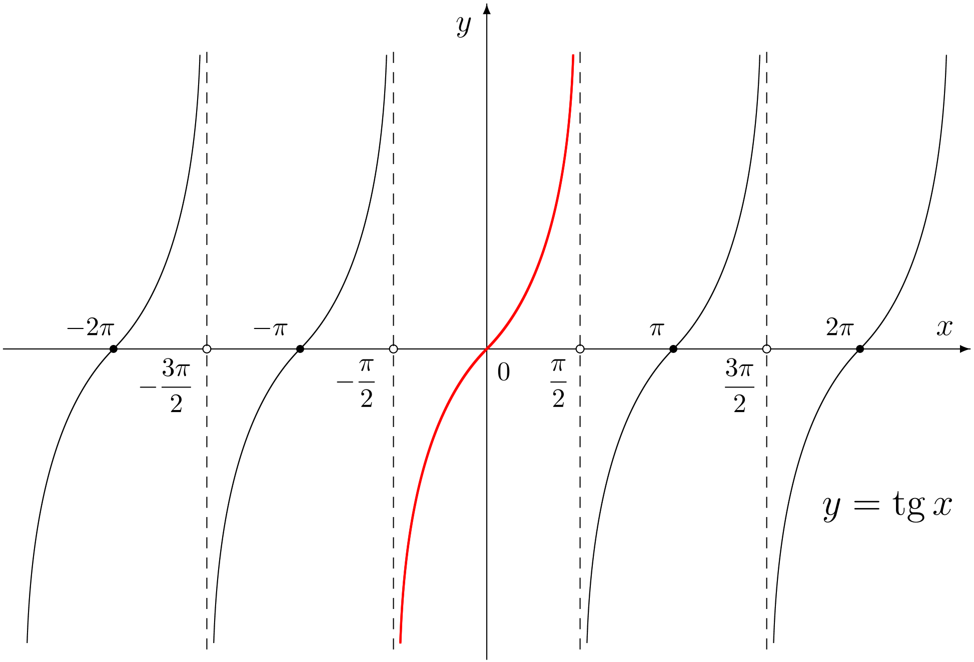
Pro $x \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ a $y \in \langle -1, 1\rangle$ tedy platí: $\quad y = \sin x \iff x = \arcsin y.$

Cyklometrická funkce $\arccos x$ **(arkuskosinus).** Podobně, inverzní funkce k funkci kosinus neexistuje, protože kosinus není prostá funkce. Restrikce kosinu na interval $\langle 0, \pi \rangle$ již ale prostá je.

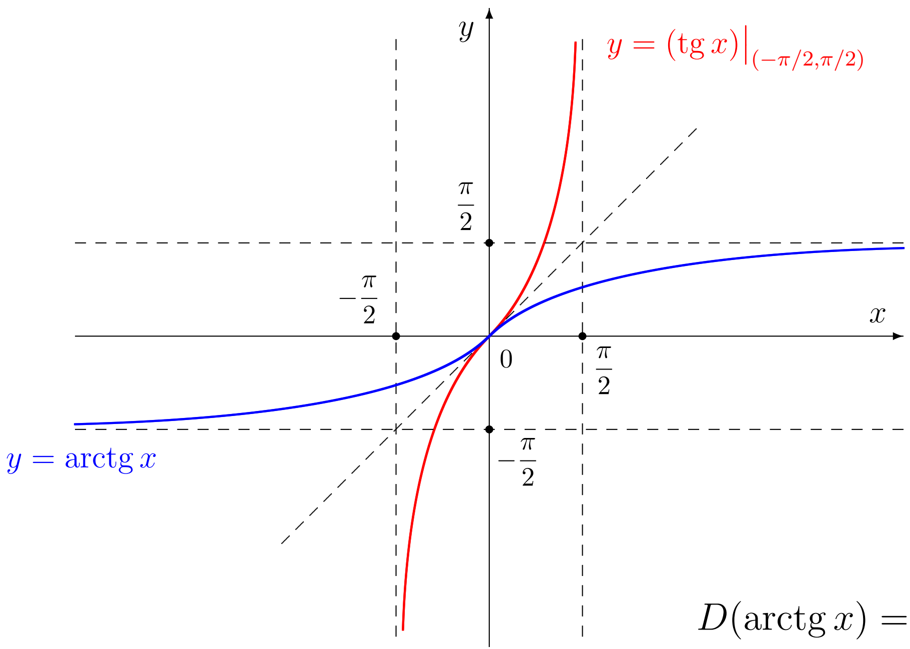


Inverzní funkci k restrikci funkce kosinus na interval $\langle 0, \pi \rangle$ nazýváme *arkuskosinus* a označujeme ji $\arccos$. Jejím definičním oborem je interval $\langle -1, 1 \rangle$ a oborem hodnot je interval $\langle 0, \pi \rangle$. **Nakreslete si sami její graf!**

Cyklometrická funkce $\operatorname{arctg} x$ **(arkustangens).** Inverzní funkce k funkci tangens neexistuje, protože tangens není prostá funkce. Restrikce funkce tangens na interval $(-\pi, 2, \pi/2)$ již ale prostá je.

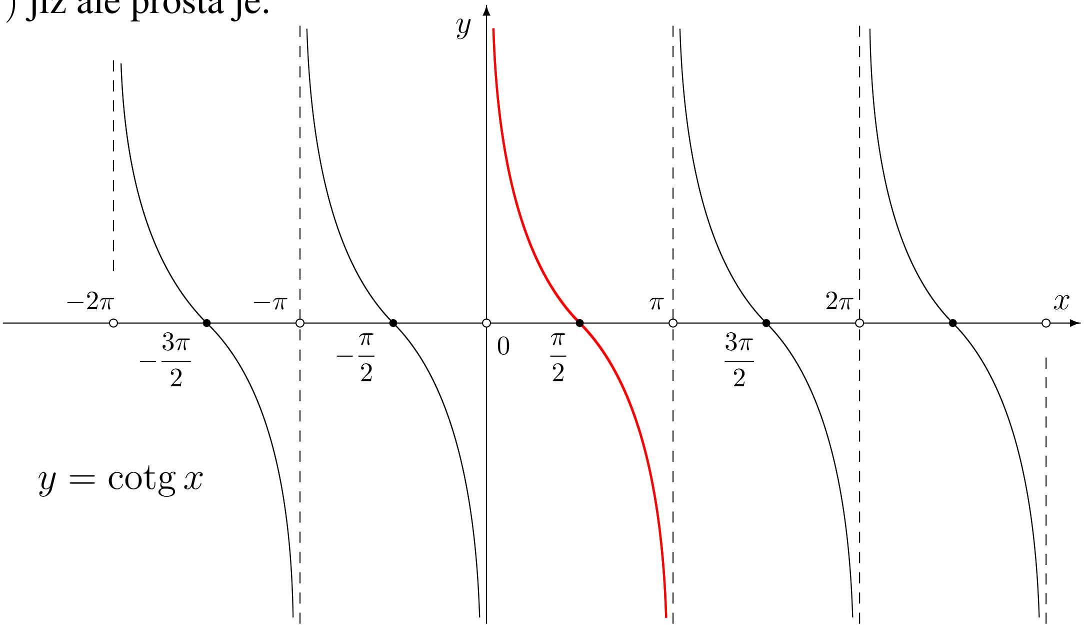


Inverzní funkci k restrikci funkce tangens na interval $(-\pi/2, \pi/2)$ nazýváme *arkustangens* a označujeme ji arctg.



$$D(\operatorname{arctg} x) = (-\infty, \infty)$$
$$H(\operatorname{arctg} x) = (-\pi/2, \pi/2)$$

Cyklometrická funkce $\operatorname{arccotg} x$ (arkuskotangens). Inverzní funkce k funkci kotangens neexistuje, protože kotangens není prostá funkce. Restrikce funkce kotangens na interval $(0, \pi)$ již ale prostá je.



Inverzní funkci k restrikci funkce kotangens na interval $(0, \pi)$ nazýváme *arkuskotangens* a označujeme ji $\operatorname{arccotg}$. Jejím definičním oborem je interval $(-\infty, \infty)$ a oborem hodnot je interval $(0, \pi)$. **Nakreslete si sami její graf!**