Matematika I – přednáška 8

Shrnutí co bylo minule

Základní vlastnosti funkcí.

Co bude dnes

Základní pojmy diferenciálního počtu. Posloupnosti reálných čísel

Tyto slidy jsou na adrese
https://users.fs.cvut.cz/jan.valasek
(pro osobní potřeby a nenahrazuje skripta ani přednášku).

Matematika I – přednáška 8

II. Diferenciální počet (reálné funkce jedné reálné proměnné)

Některé pomocné pojmy

Rozšířená množina reálných čísel: $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

prvky $-\infty$ a $+\infty$ . . . tzv. *nevlastní body*

ostatní prvky (tj. čísla z $\mathbb{R}$) . . . *vlastní body*

Některé aritmetické operace lze přirozeným způsobem rozšířit z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^*$:

a) pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme:
$x + (+\infty) = +\infty, \quad x + (-\infty) = -\infty, \quad x - (+\infty) = -\infty,$
$x - (-\infty) = +\infty, \quad x/(+\infty) = x/(-\infty) = 0;$

b) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad (+\infty) - (-\infty) = +\infty,$
$(-\infty) - (+\infty) = -\infty,$
$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty;$

c) pro $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ definujeme:
$x \cdot (+\infty) = +\infty$ (je-li $x > 0$) nebo $= -\infty$ je-li ($x < 0$),
$x \cdot (-\infty) = -\infty$ (je-li $x > 0$) nebo $= +\infty$ (je-li ($x < 0$),
$(+\infty)/x = \operatorname{sgn} x \cdot (+\infty), \quad (-\infty)/x = \operatorname{sgn} x \cdot (-\infty).$

Nedefinované operace:

dělení nulou, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$ a $0 \cdot (\pm\infty)$. (Říkáme, že tyto operace nemají smysl.)

Na množinu $\mathbb{R}^*$ lze z $\mathbb{R}$ rozšířit uspořádání, definované pomocí relace „$<$“: Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ definujeme: $-\infty < x < +\infty$.

Místo $+\infty$ budeme dále většinou psát pouze ∞.

Okolí bodu v $\mathbb{R}^*$

Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$, pak *okolím* bodu x_0 nazýváme každý interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$.
Značení: $U_\varepsilon(x_0)$ nebo pouze $U(x_0)$.

prstencové okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$: množina typu $U(x_0) - \{x_0\}$;
značení: $P(x_0)$

okolí ∞ (a zároveň *prstencové okolí* ∞:) jakýkoliv interval typu (a, ∞) (kde $a \in \mathbb{R}$);
značení: $P(\infty)$ nebo $U(\infty)$

okolí $-\infty$ (a zároveň *prstencové okolí* $-\infty$:) jakýkoliv interval typu $(-\infty, a)$ (kde $a \in \mathbb{R}$); značení: $P(-\infty)$ nebo $U(-\infty)$

levé okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$: každý interval typu $(x_0 - \varepsilon, x_0)$, kde $\varepsilon > 0$;
značení: $P_-(x_0)$

pravé okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$: každý interval typu $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$;
značení: $P_+(x_0)$

Extrémy množin v $\mathbb{R}$

maximum množiny M ($\subset \mathbb{R}$): číslo $y \in M$ takové, že $\forall\, x \in M : \quad x \leq y$
značení: $\max M$

minimum množiny M ($\subset \mathbb{R}$): číslo $z \in M$ takové, že $\forall\, x \in M : \quad x \geq z$
značení: $\min M$

Maximum a minimum množiny M souhrnně nazýváme *extrémy* množiny M.

<u>Ne každá množina M v $\mathbb{R}$ musí mít maximum a minimum</u>.
Jinými slovy: $\max M$ (nebo $\min M$) může, ale nemusí existovat.

Příklady: viz TABULE $\boxed{\text{T8.1}}$

Supremum a infimum množiny. Na tabuli.

II.2. Posloupnosti reálných čísel

Definice (posloupnost). *Posloupností reálných čísel* (krátce pouze *posloupností*) nazýváme zobrazení množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$.

Posloupnost, která přirozeným číslům n přiřazuje reálná čísla a_n, se značí $\{a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots\}$ nebo pouze $\{a_n\}$.

a_n $\ldots$ *n–tý člen* posloupnosti $\{a_n\}$

Je-li $M \subset \mathbb{R}$ a $a_n \in M$, pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\{a_n\}$ nazýváme *posloupností v M*.

Definice (posloupnost omezená). Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme

- *omezenou shora,* existuje-li $K \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_n \leq K$,
- *omezenou zdola,* existuje-li $L \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_n \geq L$,
- *omezenou,* je-li tato posloupnost omezená shora i zdola,

Příklady: viz TABULE

Definice (posloupnost rostoucí, klesající). Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme

- *rostoucí,* jestliže $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_n < a_{n+1}$;
- *klesající,* jestliže $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_n > a_{n+1}$.

Příklady: viz TABULE

Definice (posloupnost neklesající, nerostoucí). Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme

- *neklesající,* jestliže $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_n \leq a_{n+1}$;
- *nerostoucí,* jestliže $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_n \geq a_{n+1}$.

Příklady: viz TABULE

$$\left.\begin{array}{l}\text{posloupnosti rostoucí}\\ \text{posloupnosti klesající}\end{array}\right\}\quad \text{posloupnosti } \textit{ryze monotónní}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{posloupnosti neklesající}\\ \text{posloupnosti nerostoucí}\end{array}\right\}\quad \text{posloupnosti } \textit{monotónní}$$

Poznámka. Každá ryze monotónní posloupnost je zároveň monotónní posloupností.

Limita posloupnosti

Motivace. Některé posloupnosti $\{a_n\}$ mají tu vlastnost, že a_n se „blíží" k nějakému číslu $a \in \mathbb{R}^*$, jestliže indexy n „jdou do nekonečna". Jak toto přesně popsat?

Definice (limita posloupnosti). Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ nazýváme *limitou* posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$[\forall\, U(a)] \quad [\exists\, n_0 \in \mathbb{N}] \quad [\forall\, n \in \mathbb{N}] : \quad (n \geq n_0) \implies (a_n \in U(a)).$$

Píšeme: $\lim a_n = a$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Příklady: viz TABULE

Definice (posloupnost konvergentní, divergentní). Je-li $\lim a_n \in \mathbb{R}$ (což znamená: limita existuje a je konečná), říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *konvergentní.*

Jestliže $\lim a_n = \infty$ nebo $-\infty$ nebo limita neexistuje, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *divergentní.*

Poznámka. Konečnou limitu též nazýváme *vlastní limitou,* nekonečnou limitu též nazýváme *nevlastní limitou.*

Věta. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz: viz TABULE

Definice (vybraná posloupnost). Nechť $\{k_n\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost

$$\{a_{k_1},\, a_{k_2},\, a_{k_3},\, \dots,\, a_{k_n},\, \dots\}$$

nazýváme *vybranou posloupností* z posloupnosti $\{a_n\}$. Tuto vybranou posloupnost značíme krátce $\{a_{k_n}\}$.

Příklad: viz TABULE

Věta. *Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou a, pak jakákoliv vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$ má tutéž limitu a.*

Poznámka. Pokud posloupnost $\{a_n\}$ obsahuje dvě vybrané posloupnosti (= podposloupnosti), které mají různé limity, pak $\lim a_n$ neexistuje.

Příklad: viz TABULE

Nejdůležitější postupy jak vypočítat limitu zadané posloupnosti, se naučíte na konkrétních příkladech na cvičení. Postupy jsou založeny zejména na následujících větách.

Věta (o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu posloupností).

a) $\lim\,(a_n + b_n) \;=\; \lim\, a_n + \lim\, b_n$,

b) $\lim\,(a_n - b_n) \;=\; \lim\, a_n - \lim\, b_n$,

c) $\lim\,(a_n \cdot b_n) \;=\; \lim\, a_n \;\cdot\; \lim\, b_n$,

d) $\lim\, \dfrac{a_n}{b_n} \;=\; \dfrac{\lim\, a_n}{\lim\, b_n}$,

pokud pravé strany mají smysl (tj. limity na pravých stranách existují a užité operace mají smysl).

Věta (o limitě sevřené posloupnosti). *Nechť* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ *jsou posloupnosti, pro které platí* $\lim\, a_n = \lim\, c_n = l$ *a* $\forall\, n \in \mathbb{N}: \;\; a_n \leq b_n \leq c_n$. *Pak* $\lim\, b_n = l$.

Příklady: viz TABULE