Matematika I A – ukázkový test 1 pro 2014/2015

1. Je dána soustava rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ x + y + 3z &= 1 \\ (2a-1)x + (a+1)y + z &= 1 - a \end{aligned}$$

a) Napište *Frobeniovu větu* (existence i počet řešení).

b) Vyšetřete počet řešení soustavy v závislosti na hodnotě parametru $a \in \mathbb{R}$.

c) Najděte řešení zadané soustavy pro $a = 1$.

2. Je dána matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Definujte pojem *inverzní matice* ke čtvercové matici $\boldsymbol{A}$.

b) Uveďte některou z nutných a postačujících podmínek existence inverzní matice. Ověřte splnění této podmínky pro zadanou matici $\boldsymbol{A}$.

c) Vypočítejte $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\det\boldsymbol{A}$, $\det(\boldsymbol{A}^{-1})$ a $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})$. Ověřte správnost matice $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Matematika I A – ukázkový test 2 pro 2014/2015

1. Je dána matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Napište definici pojmů *vlastní číslo* a *vlastní vektor* matice.

b) Napište *charakteristický polynom* zadané matice $\boldsymbol{A}$. Ověřte, že čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ a $\lambda_3 = 3$ jsou kořeny příslušné charakteristické rovnice.

c) Pro vlastní číslo λ_1 napište odpovídající soustavu rovnic pro výpočet vlastních vektorů. *Vlastní vektory* odpovídající tomuto vlastnímu číslu pak určete.

2. Je dána matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & b & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

a) Definujte pojmy *regulární* a *singulární matice.*

b) Vypočítejte determinant matice $\boldsymbol{A}$. Určete hodnost matice $\boldsymbol{A}$, je-li $a = 1$, $b = 2$.

c) Pro které hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ má homogenní soustava $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{0}$ pouze nulové řešení ? Odpověď zdůvodněte.

Matematika I B – ukázkový test 1 pro 2014/2015

1a) Definujte pojem *lineární závislost* skupiny vektorů $\vec{u_1}, ..., \vec{u_n}$.

b) Rozhodněte, zda vektory $\vec{u} = (1;2;3)$, $\vec{v} = (0;1;1)$ a $\vec{w} = (3;2;1)$ jsou lineárně nezávislé.

c) Je-li to možné, vyjádřete vektor $\vec{a} = (1;2;1)$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ (tzn. určete koeficienty této lineární kombinace).

2. Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Zdůvodněte existenci a určete inverzní matici A^{-1}. Ověřte správnost výsledku.

b) Z rovnice $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ vypočítejte neznámou matici X.

c) Vypočítejte matici $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$.

Matematika I B – ukázkový test 2 pro 2014/2015

1. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ 2x + y \quad\quad &= -4 \\ 5x + y - 3z &= -13 \end{aligned}$$

a) Pomocí Gaussova algoritmu nebo Cramerova pravidla určete řešení dané soustavy. Proveďte zkoušku.

b) Určete hodnost matice této soustavy a hodnost matice rozšířené.

2. Je dána matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Nalezněte vlastní čísla této matice. Zvolte jedno z nich a napište odpovídající soustavu rovnic pro výpočet vlastních vektorů. Vlastní vektory pak určete.

b) Zdůvodněte, zda k dané matici $\boldsymbol{A}$ existuje matice inverzní $\boldsymbol{A}^{-1}$. Pokud ano, vypočítejte ji. Ověřte správnost výsledku.