Matematika II – přednáška 25

- opakování minulé přednášky
- Bonusový obsahu Mat II: (části teorie vekt. pole)
  - Stokesova věta
  - solenoidální vektorové pole
  - Helmholtzův rozklad vektorového pole

Opakování

- a) Gaussova-Ostrogradského věta
- b) potenciální pole nejen v $\mathbf{E}_3$

Gaussova–Ostrogradského věta

Věta (Gaussova–Ostrogradského věta.). *Předpokládejme, že*

a) *vektorová funkce* $\mathbf{f}$ *má spojité parciální derivace v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$,

b) σ *je uzavřená po částech hladká plocha v* D, *orientovaná směrem vně a taková, že* $\operatorname{Int}\sigma \subset D$.

Pak platí:

$$\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} \;=\; \iiint_{\operatorname{Int}\sigma} \operatorname{div}\mathbf{f}\;\, dx\, dy\, dz.$$

Gaussova–Ostrogradského věta

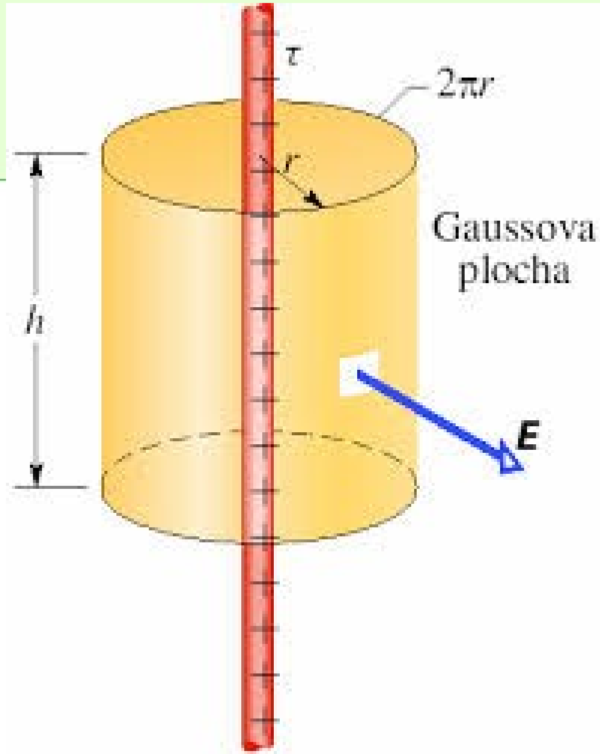
Věta (Gaussova–Ostrogradského věta.). *Předpokládejme, že*

a) *vektorová funkce* $\mathbf{f}$ *má spojité parciální derivace v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$,

b) σ *je uzavřená po částech hladká plocha v* D, *orientovaná směrem vně a taková, že* $\operatorname{Int}\sigma \subset D$.

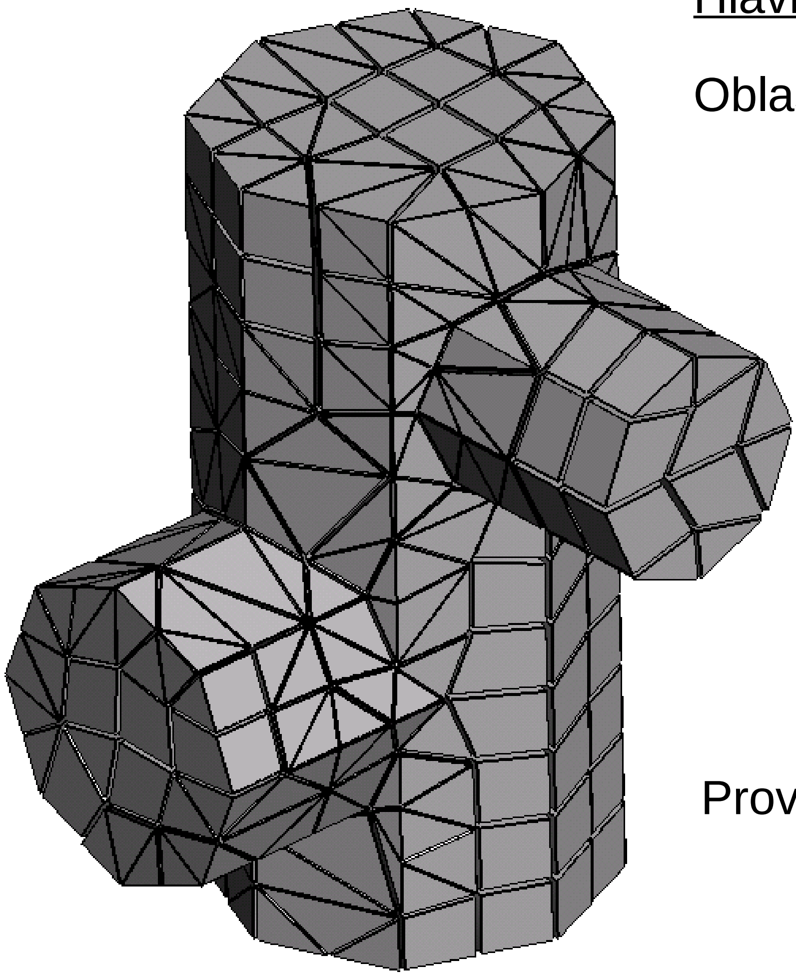
Pak platí:

$$\iint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \iiint_{\operatorname{Int}\sigma} \operatorname{div} \mathbf{f} \; dx\, dy\, dz.$$



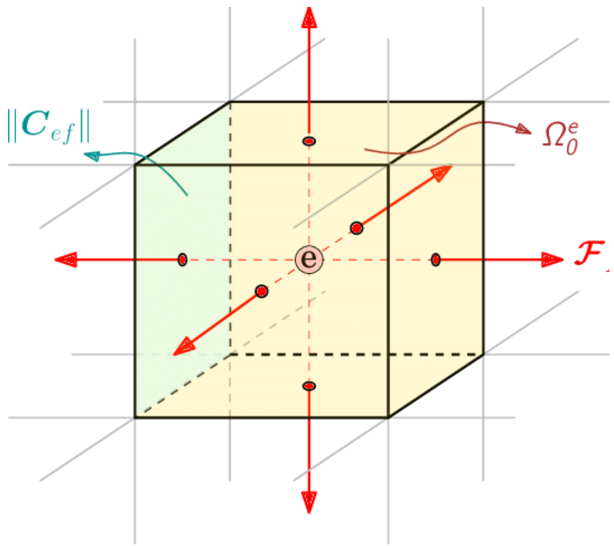
Metoda konečných objemů

- numerická metoda
- specializace našeho ústavu



Hlavní myšlenka:

Oblast rozdělím na malé objemy.



Provedu bilanci mezi vtoky a výtoky na jednotlivých objemech.

Potenciální pole = proč?

Definice (Potenciální vektorové pole.). Vektorové pole $\mathbf{f}$ v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$) nazýváme *potenciální pole* v D, jestliže existuje skalární pole (= skalární funkce) φ v D takové, že

$$\mathbf{f} = \operatorname{grad} \varphi$$

v D. Skalární funkci φ nazýváme *potenciál* vektorového pole $\mathbf{f}$ v D.

Věta. *Je-li* $\mathbf{f}$ *potenciální a spojité vektorové pole v oblasti* D, φ *je potenciál* $\mathbf{f}$ *v* D *a* C *je křivka v* D, *pak*

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \varphi(k.b.C) - \varphi(p.b.C).$$

Věta. $\mathbf{f}$ *je potenciální vektorové pole v oblasti* D $\Leftrightarrow$ *Křivkový integrál vektorové funkce* $\mathbf{f}$ *nezávisí v* D *na integrační cestě.*

Potenciální pole v $\mathbf{E}_2$

Věta (Potenciální pole v $\mathbb{E}_2$ – postačující podmínka.). *Nechť*

a) *D je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_2$ a*

b) *$\mathbf{f} = (U, V)$ je vektorové pole v D, jehož souřadnicové funkce U a V mají v D spojité parciální derivace a splňují podmínku:*

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{v } D.$$

Pak $\mathbf{f}$ je potenciální pole v D.

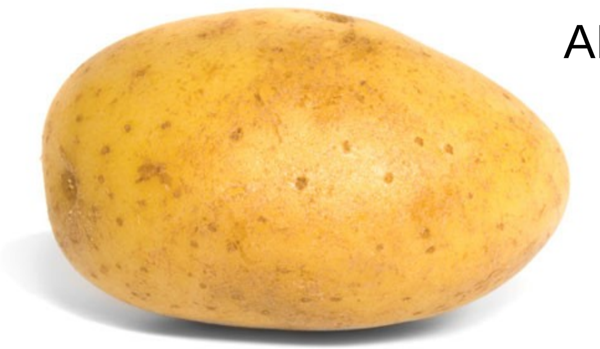
Potenciální pole v $\mathbf{E}_3$

Věta (Potenciální pole v $\mathbb{E}_3$ – nutná podmínka.). *Nechť je* $\mathbf{f}$ *potenciální pole v oblasti* $D \subset E_3$*, které má spojité parciální derivace v* D*. Pak*

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

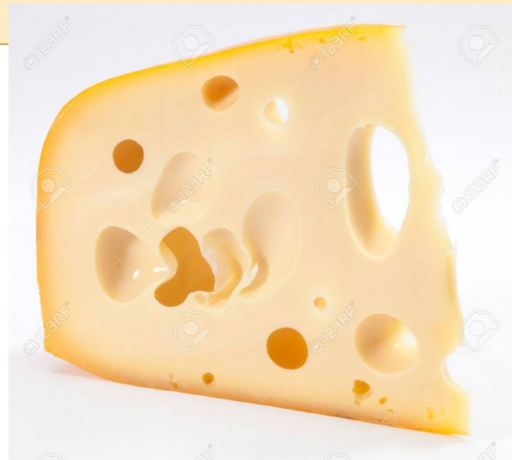
v oblasti D*.*

Definice (Jednoduše souvislá oblast v E_3.). Oblast $D \subset \mathbb{E}_3$ nazýváme *jednoduše souvislou*, pokud každou uzavřenou křivku C v D můžeme spojitě změnit (stáhnout) v bod v D, aniž přitom kdykoliv oblast D opustíme.



ANO

NE



Rotace vektorového pole

Definice (rotace vektorového pole). *Nechť* $\mathbf{f} = (U, V, W)$ *je vektorové pole v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$. *Rotací* $\mathbf{f}$ *nazýváme vektorové pole, které označujeme* $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ *a které definujeme rovnicí*

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} \;=\; \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z},\; \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x},\; \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

(ve všech bodech $[x, y, z] \in D$*, ve kterých má pravá strana smysl).*

Pomocí operátoru nabla lze rotaci vyjádřit:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} \;=\; \nabla \times \mathbf{f} \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}, & \dfrac{\partial}{\partial y}, & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ U, & V, & W \end{vmatrix}.$$

”Determinant”na pravé není determinantem přesně v tom smyslu, v jakém jej známe. Je to však užitečné schéma, pro výpočet rotace. Příklady na tabuli.

Potenciální pole v E_3.

Věta (Potenciální pole v $\mathbb{E}_3$ – postačující podmínka.). *Nechť*

a) *D je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_3$*

b) *$\mathbf{f}$ je vektorové pole v D, které má v D spojité parciální derivace a splňuje podmínku:*

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{v } D.$$

Pak $\mathbf{f}$ je potenciální pole v D.

Opakování Greenovy věty

- Křivkový integrál z vekt. f-ce = práce

Greenova věta

Věta (Greenova věta). *Předpokládejme, že*

a) $\mathbf{f} = (U, V)$ *je vektorová funkce v oblasti* $O \subset \mathbb{E}_2$ *a souřadnicové funkce* U, V *mají v* O *spojité parciální derivace,*

b) C *je kladně orientovaná uzavřená křivka v* O *taková, že* $\operatorname{Int} C \subset O$.

Pak platí:

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\operatorname{Int} C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Stokesova věta

- zobecnění Green. věty pro křivky z $\mathbf{E}_3$

Věta (Stokesova věta.). *Předpokládejme, že*

a) *vektorová funkce* $\mathbf{f}$ *má spojité parciální derivace v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$,

b) σ *je jednoduchá po částech hladká plocha v* D *jejímž okrajem je jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka* C,

c) *plocha* σ *je se svým okrajem* C *souhlasně orientovaná.*

Pak platí:

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_\sigma \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p}$$

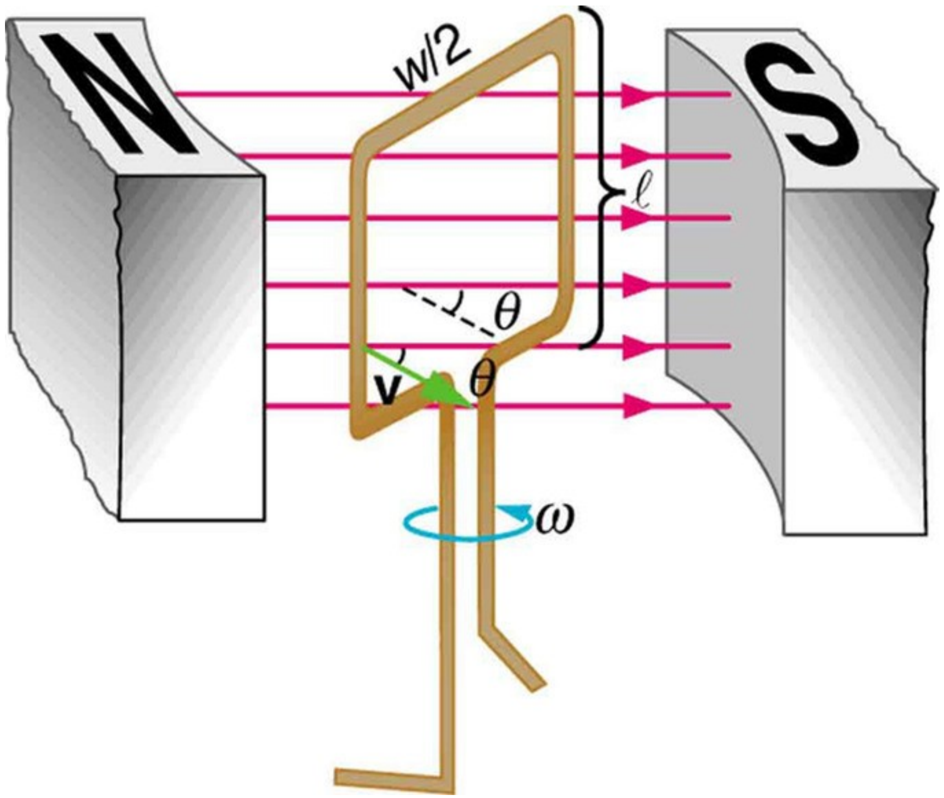
Poznámky

- Pravidlo pravé ruky
- Když je **f** potenciální, tak výsledek (cirkulace vekt. pole) musí být nulový

Poznámky

- Pravidlo pravé ruky
- Když je **f** potenciální, tak cirkulace vekt. pole je 0
- Použití?

  Faradayův zákon



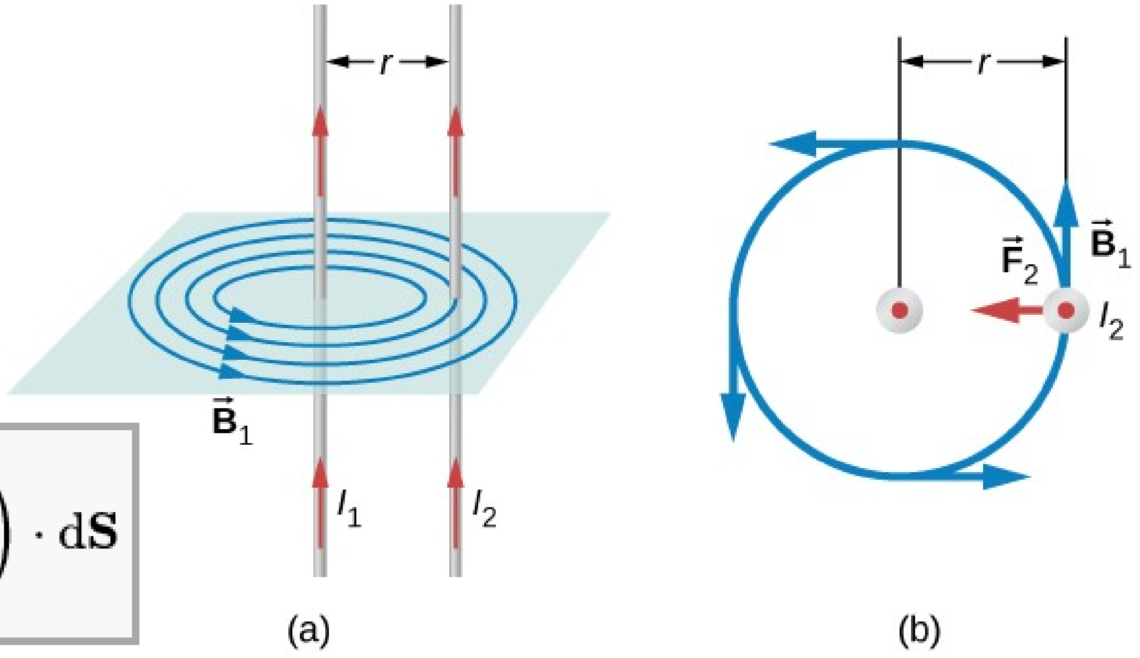
$$\mathcal{E}_{\mathrm{F}}(t) = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Poznámky

- Pravidlo pravé ruky
- Když je **f** potenciální, tak cirkulace vekt. pole je 0
- Použití - Faradayův zákon

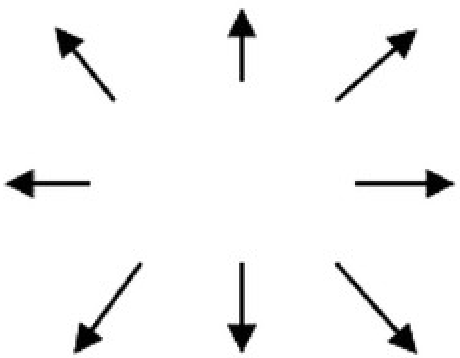
Amperův zákon

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \left(\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

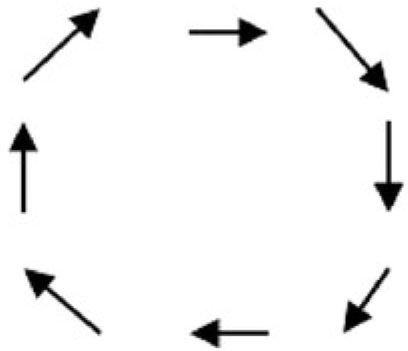


Solenoidální pole

- vířivé pole = částečně protiklad potenciálního pole
  - může obsahovat víry (pot. nemůže)
  - nemůže mít zřídla (pot. ano)



?



?

Solenoidální pole

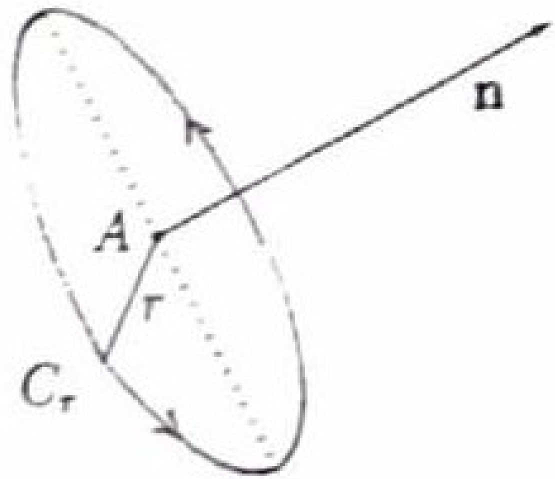
V.4.1. Solenoidální vektorové pole v $\mathbb{E}_3$. Vektorové pole $\mathbf{f}$ v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$ nazýváme *solenoidální pole* v D, jestliže existuje vektorové pole (= vektorová funkce) $\mathbf{w}$ v D takové, že

$$\text{(V.4.1)} \qquad \mathbf{f} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$$

v D. Vektorovou funkci $\mathbf{w}$ pak nazýváme *vektorový potenciál* pole $\mathbf{f}$ v D.

Význam rotace

IV.5.13. Fyzikální význam rotace. Předpokládejme, že vektorová funkce $\mathbf{f}$ má spojité parciální derivace v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$, $A \in D$ a $\mathbf{n}$ je vektor jednotkové délky. Označme σ_r kruh se středem v bodě A, poloměrem r a normálovým vektorem $\mathbf{n}$. Označme dále C_r kružnici, která je okrajem plochy σ_r a která je orientovaná souhlasně se σ_r. Pak platí:



Obr. 29

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(A) \cdot \mathbf{n} = \frac{\operatorname{rot} \mathbf{f}(A) \cdot \mathbf{n}}{p(\sigma_r)} \iint_{\sigma_r} dp = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\sigma_r} \operatorname{rot} \mathbf{f}(A) \cdot \mathbf{n}\, dp$$

$$= \lim_{r \to 0+} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\sigma_r} \operatorname{rot} \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{p} = \lim_{r \to 0+} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{C_r} \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s}.$$

V.4.2. Věta. *Předpokládejme, že* $\mathbf{f}$ *je spojité vektorové pole v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$. *Pak následující dva výroky jsou ekvivalentní:*

a) $\mathbf{f}$ *je solenoidální pole v* D.

b) *Tok pole* $\mathbf{f}$ *každou uzavřenou plochou v* D *je nulový.*

V.4.2. Věta. *Předpokládejme, že* $\mathbf{f}$ *je spojité vektorové pole v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$. *Pak následující dva výroky jsou ekvivalentní:*

a) $\mathbf{f}$ *je solenoidální pole v* D.

b) *Tok pole* $\mathbf{f}$ *každou uzavřenou plochou v* D *je nulový.*

Důkaz: Implikace a) $\Longrightarrow$ b) je okamžitým důsledkem poznámky IV.5.11: Předpokládejme, že pole $\mathbf{f}$ je solenoidálním polem v D a $\mathbf{w}$ je jeho vektorový potenciál. Tok pole $\mathbf{f}$ uzavřenou plochou σ v D je roven

$$\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \iint_\sigma \operatorname{rot} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{p} = 0.$$

Důkaz opačné implikace, tj. b) $\Longrightarrow$ a), je náročnější tomto textu jej neuvádíme.

Proč?

Gauss.-Ostrogr. věta:

$$\iint_\sigma \operatorname{rot} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{p} = \iiint_{\operatorname{Int}\sigma} \underbrace{\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{w}}_{=0} \, dx\, dy\, dz.$$

V.4.4. Věta. (Solenoidální pole – nutná podmínka.) *Předpokládejme, že* $\mathbf{f}$ *je solenoidální pole v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$, *které má spojité parciální derivace v* D. *Pak*

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 0 \quad \text{v } D. \tag{V.4.2}$$

V.4.4. Věta. (Solenoidální pole – nutná podmínka.) *Předpokládejme, že* $\mathbf{f}$ *je solenoidální pole v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$, *které má spojité parciální derivace v* D. *Pak*

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 0 \quad \text{v } D. \tag{V.4.2}$$

V.4.7. Plošně jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_3$. Oblast $D \subset \mathbb{E}_3$ nazýváme *plošně jednoduše souvislou*, pokud každou uzavřenou plochu σ v D je možné spojitě změnit (stáhnout) v bod v D, aniž přitom kdykoliv oblast D opustíme.

Plošně jednoduše souvislou oblast v $\mathbb{E}_3$ by také bylo možné definovat jako oblast D s tou vlastností, že vnitřek každé uzavřené plochy v D je podmnožinou D.

ANO:

E_3

E_3 mínus přímka

Vnitřek koule, krychle atd.

NE:

E_3 mínus bod

E_3 mínus uzavřená množina

Vnějšek krychle, koule atd.

V.4.4. Věta. (Solenoidální pole – nutná podmínka.) *Předpokládejme, že* $\mathbf{f}$ *je solenoidální pole v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$, *které má spojité parciální derivace v* D. *Pak*

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 0 \quad \text{v } D. \tag{V.4.2}$$

V.4.7. Plošně jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_3$. Oblast $D \subset \mathbb{E}_3$ nazýváme *plošně jednoduše souvislou*, pokud každou uzavřenou plochu σ v D je možné spojitě změnit (stáhnout) v bod v D, aniž přitom kdykoliv oblast D opustíme.

Plošně jednoduše souvislou oblast v $\mathbb{E}_3$ by také bylo možné definovat jako oblast D s tou vlastností, že vnitřek každé uzavřené plochy v D je podmnožinou D.

V.4.9. Věta. (Solenoidální pole – postačující podmínka.) *Nechť*

a) *D je plošně jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_3$ a*

b) *$\mathbf{f}$ je vektorové pole v D, které má v D spojité parciální derivace a které splňuje podmínku (V.4.2):* $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ *v D.*

Pak $\mathbf{f}$ *je solenoidální pole v D.*

V.4.9. Věta. (Solenoidální pole – postačující podmínka.) *Nechť*

a) *D je plošně jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_3$ a*

b) *$\mathbf{f}$ je vektorové pole v D, které má v D spojité parciální derivace a které splňuje podmínku (V.4.2):* $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ *v D.*

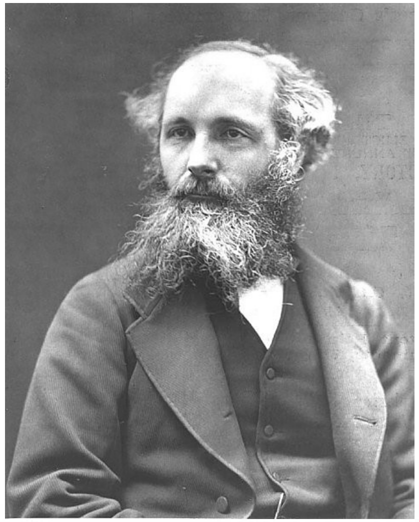
Pak $\mathbf{f}$ je solenoidální pole v D.

D ů k a z : Ukážeme, že tok vektorového pole $\mathbf{f}$ každou uzavřenou plochou v D je nulový. Z toho již vyplývá, že $\mathbf{f}$ je solenoidální pole v D. (Viz větu V.4.2.) Buď tedy σ libovolná uzavřená plocha v D. Jelikož D je plošně jednoduše souvislá oblast, $Int\,\sigma \subset D$. Užitím Gaussovy–Ostrogradského věty dostáváme:

$$\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \pm \iiint_{Int\,\sigma} \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx\, dy\, dz = 0.$$

(Znaménko "+" platí, je-li plocha σ orientovaná směrem vně a "−" platí, je-li plocha σ orientovaná směrem dovnitř. Jelikož integrál na pravé straně je ale roven nule, znaménko není důležité.)

Maxwellovy rovnice

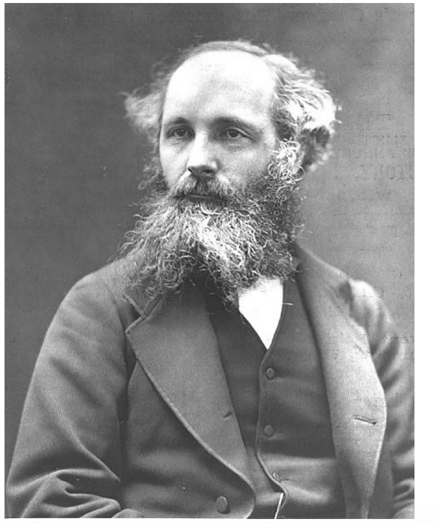


V.4.12. Příklad – elektrostatické a magnetické pole. Představme si, že oblast $D \subset \mathbb{E}_3$ je vyplněna homogenním prostředím s permitivitou ϵ a permeabilitou μ. V D protéká elektrický proud s hustotou $\mathbf{J}$ a elektrické náboje jsou rozloženy s hustotou ρ. Označme $\mathbf{E}$ intenzitu elektrického pole a $\mathbf{B}$ intenzitu magnetického pole v D. Předpokládejme, že $\mathbf{E}$ ani $\mathbf{B}$ nezávisí na čase a jsou tudíž vektorovými funkcemi pouze prostorových proměnných x, y a z. V takovém případě místo "elektrické pole" častěji používáme označení "elektrostatické pole". V teorii elektromagnetického pole se dokazuje, že vektorová pole $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ vyhovují v oblasti D tzv. *Maxwellovým rovnicím*:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \, \mathbf{J}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Maxwellovy rovnice



V.4.12. Příklad – elektrostatické a magnetické pole. Představme si, že oblast $D \subset \mathbb{E}_3$ je vyplněna homogenním prostředím s permitivitou ϵ a permeabilitou μ. V D protéká elektrický proud s hustotou $\mathbf{J}$ a elektrické náboje jsou rozloženy s hustotou ρ. Označme $\mathbf{E}$ intenzitu elektrického pole a $\mathbf{B}$ intenzitu magnetického pole v D. Předpokládejme, že $\mathbf{E}$ ani $\mathbf{B}$ nezávisí na čase a jsou tudíž vektorovými funkcemi pouze prostorových proměnných x, y a z. V takovém případě místo "elektrické pole" častěji používáme označení "elektrostatické pole". V teorii elektromagnetického pole se dokazuje, že vektorová pole $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ vyhovují v oblasti D tzv. *Maxwellovým rovnicím*:

$$\boxed{\operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon},}$$

$$\boxed{\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{J}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0.}$$

E je potenciální pole

B je solenoidální pole

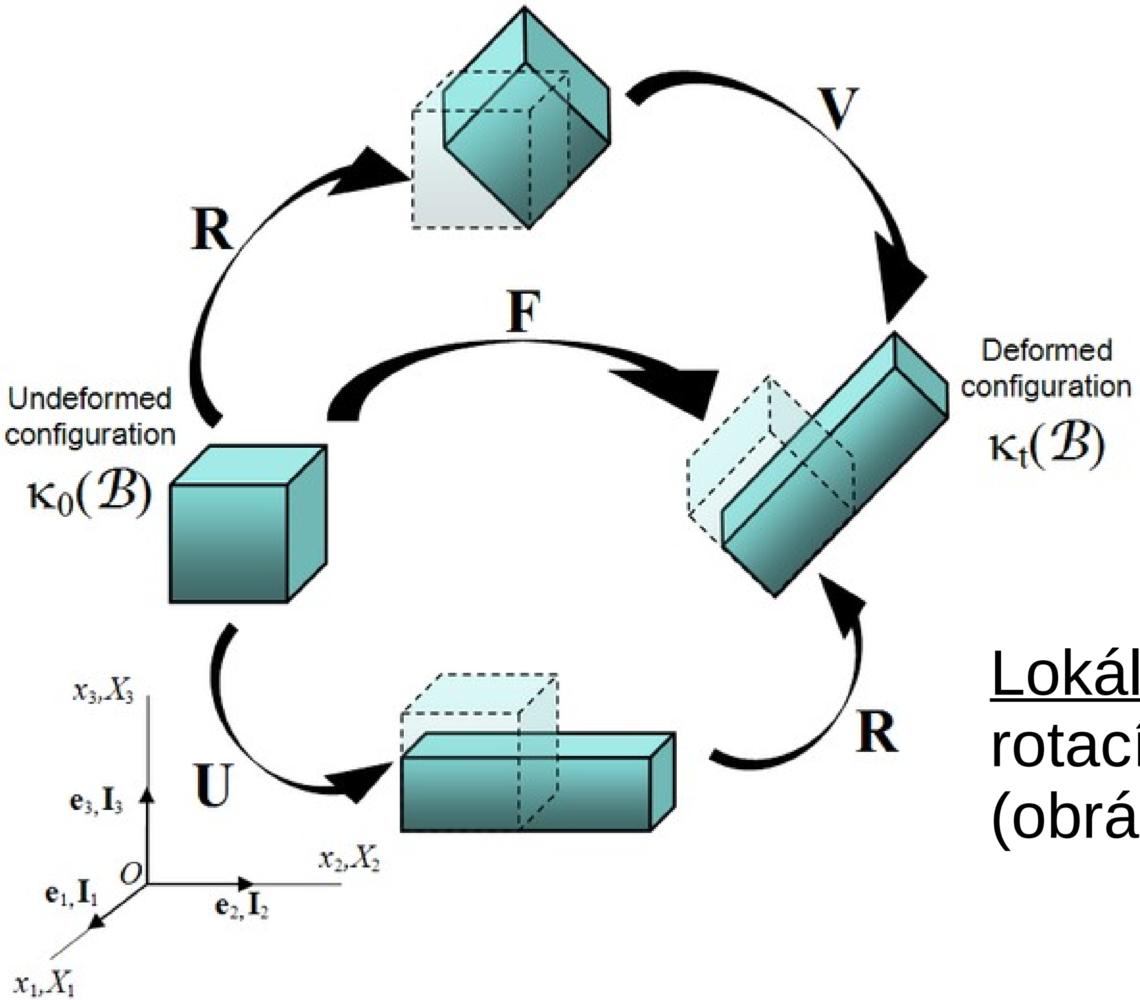
Helmholtzova věta

- nebo též Helmholtzův rozklad

Nechť **f** je dvakrát spojitě diferencovatelné vektorové pole definované v celém E_3. Dále nechť **f** klesá rychleji než 1/r pro r jdoucí do +∞. Pak lze **f** jednoznačně zapsat jako:

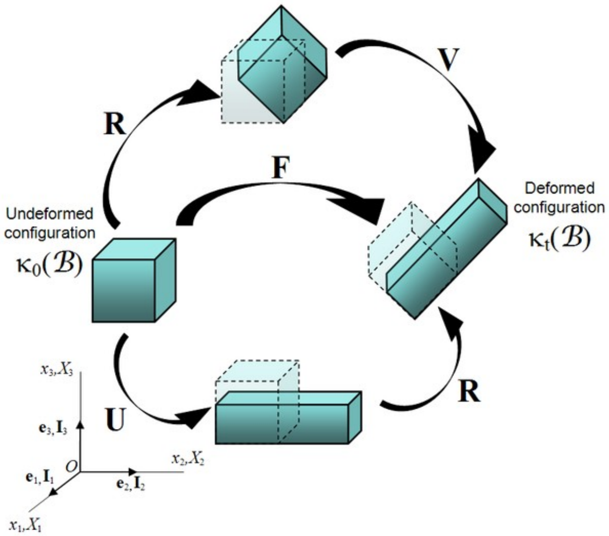
$$\mathbf{f} = - \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \mathbf{w}.$$

Příklady použití



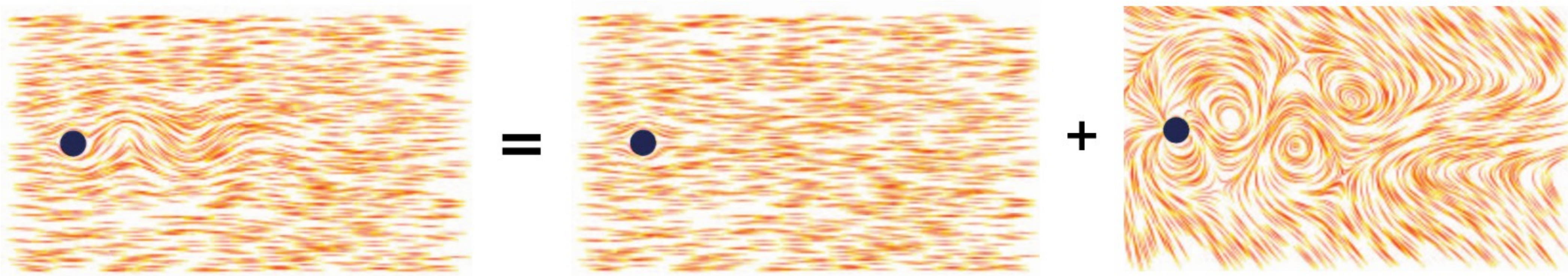
Lokální deformaci tělesa lze popsat:
rotací a protažení/smrštění
(obrázek popisuje něco trochu jiného)

Příklady použití



Deformace tělesa

Proudové pole lze rozložit na:



potenciální proudění a vířivé proudění