Matematika II – přednáška 10

Co bude dneska?

Jak se počítá dvojný integrál - Fubiniho věta pro dvojný integrál.

Plošný obsah rovinného obrazce.

Výpočet mechanických charakteristik rovinné desky.

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska10.pdf$
(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

Věta (Postačující podmínka pro existenci dvojného integrálu). *Nechť M je měřitelná množina v $\mathbb{E}_2$ a f je omezená a spojitá funkce na M. Pak dvojný integrál $\iint_M f \, dx \, dy$ existuje.*

Věta (Nutná a postačující podmínka pro měřitelnost množiny v $\mathbb{E}_2$). *Množina $M \subset \mathbb{E}_2$ je měřitelná (v Jordanově smyslu) právě tehdy, je-li omezená a $\mu_2(\partial M) = 0$.*

Elementární obor integrace (připomenutí)

Definice (Elementární obor integrace). *Nechť* $y = \phi_1(x)$ *a* $y = \phi_2(x)$ *jsou spojité funkce v intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a nechť* $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ *pro všechna* $x \in \langle a, b\rangle$*. Pak množinu*

$$M = \big\{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\big\}$$

nazýváme elementárním oborem integrace vzhledem k ose x*.*

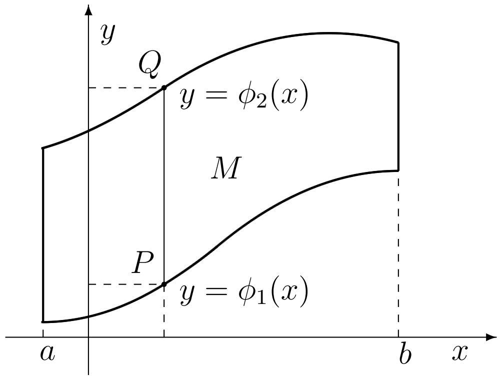
b) Nechť $x = \psi_1(y)$ *a* $x = \psi_2(y)$ *jsou spojité funkce v intervalu* $\langle c, d\rangle$ *a nechť* $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ *pro všechna* $y \in \langle c, d\rangle$*. Pak množinu*

$$M = \big\{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\big\}$$

nazýváme elementárním oborem integrace vzhledem k ose y*.*

Obrázky na tabuli.

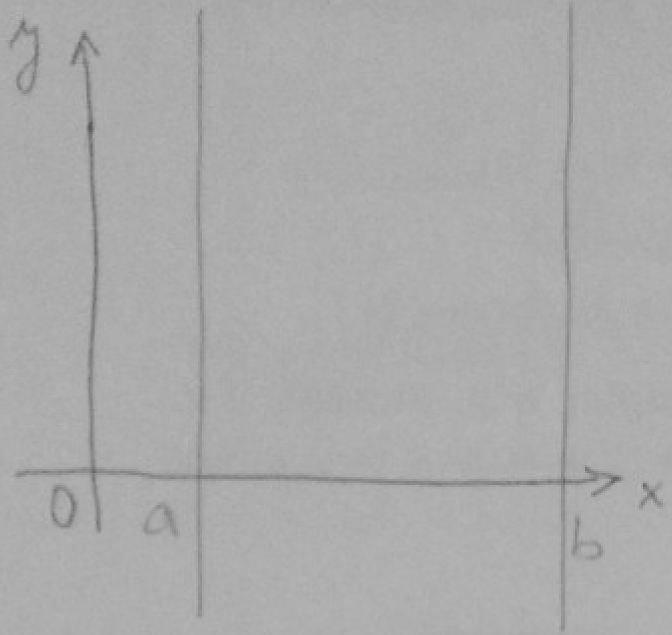
Uvažujme elementární obor integrace vzhledem k ose x.



Obr. 10a

Příklady na EOI

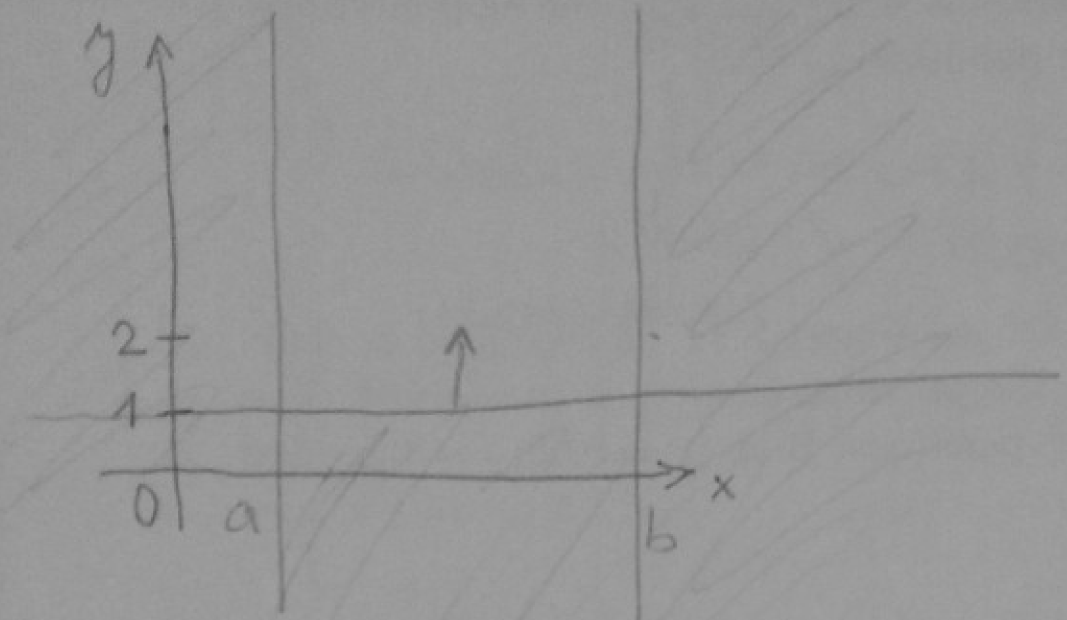
1, $M = \{ a \leq x \leq b ,$



Příklady na EOI

funkce (mohou být i konstantní)

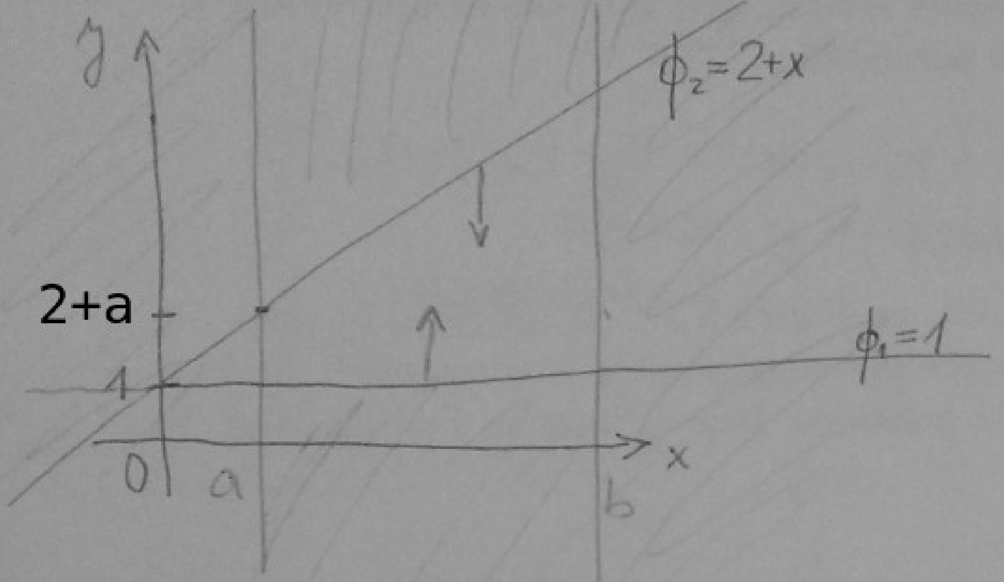
1) $M = \{ \underset{\text{čísla}}{a \leq x \leq b}, \underset{\phi_1(x)}{1} \leq y \leq \phi_2(x) = 2 + x$



Příklady na EOI

čísla   funkce (mohou být i konstantní)

1, $M = \{ \underbrace{a \leq x \leq b}_{} ,\ \underset{\phi_1(x)}{1} \leq y \leq \underline{\phi_2(x) = 2+x}$

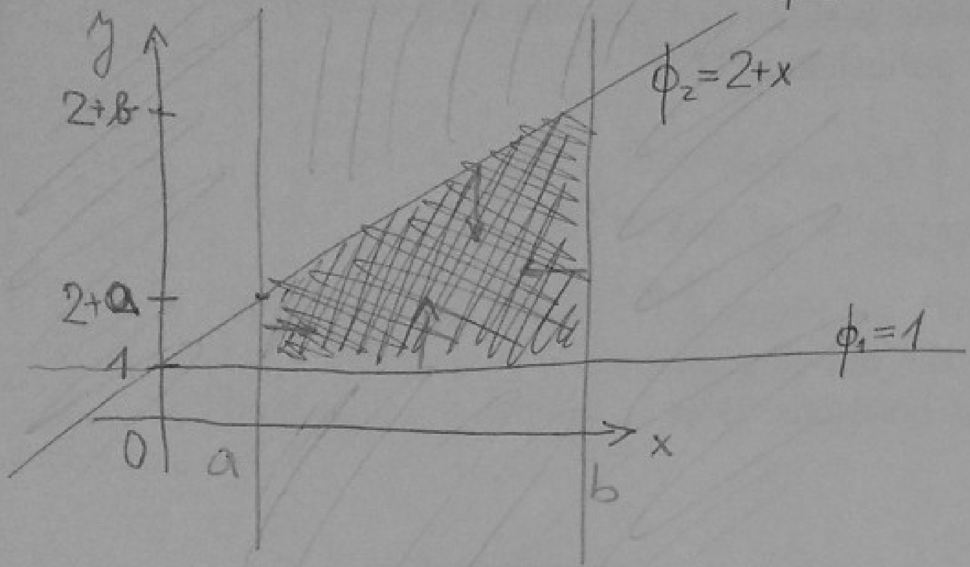


Příklady na EOI

1) $M = \{ a \le x \le b \,,\ \underset{\phi_1(x)}{\overset{\text{}}{1}} \le y \le \phi_2(x) = 2 + x \} \Rightarrow \boxed{EOI_x}$

čísla

funkce (mohou být i konstantní)

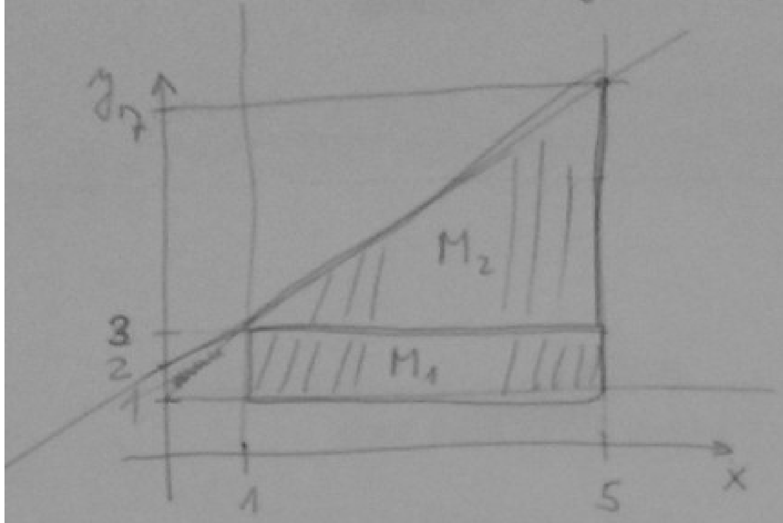


a=1, b=5

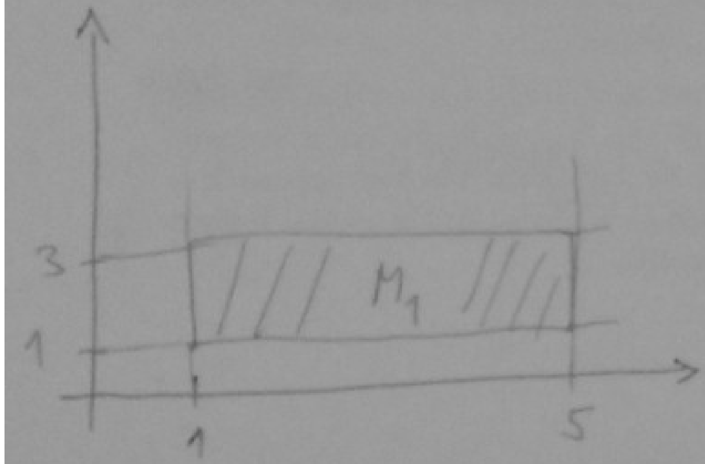
~~[illegible]~~ Lze zapsat tutéž mn. M jako EDI_y?

Ano, ale výrazně složitěji (nedělejte, jen pro ukázku).

↳ Musím M rozřezat na M_1 a M_2, které mají pevné y-ové meze!



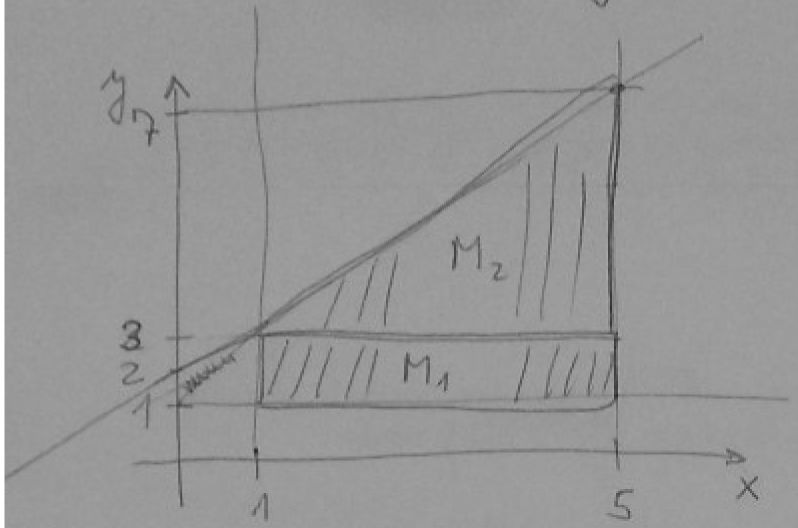
$\Downarrow$ $M_1 = \{ ? \le y \le ? \quad , \quad \le x \le$



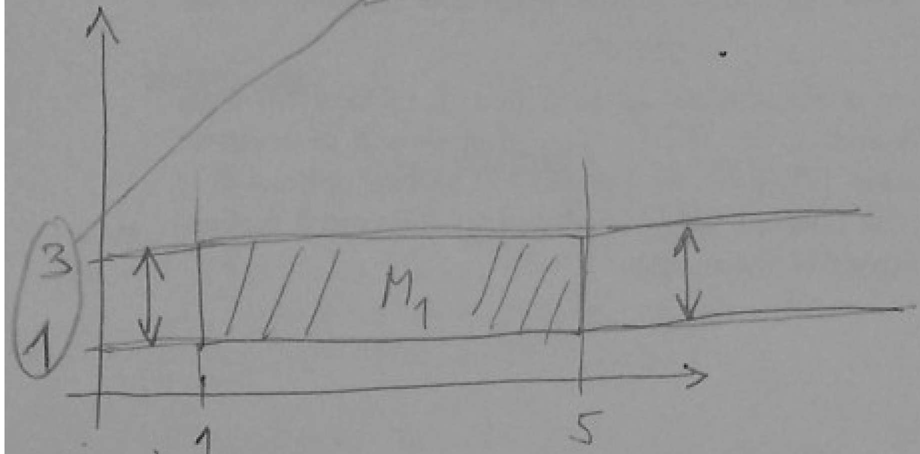
Lze zapsat tutéž mn. M jako EOI_y ?

Ano, ale výrazně složitěji (nedělejte, jen pro ukázku).

↳ Musím M rozřezat na M_1 a M_2, které mají pevné y-ové meze!



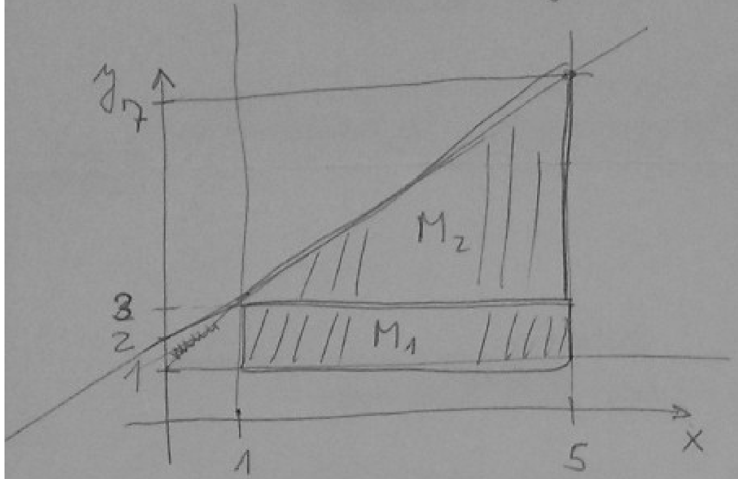
$\Downarrow$ $M_1 = \{ 1 \le y \le 3 \; , \quad \le x \le$



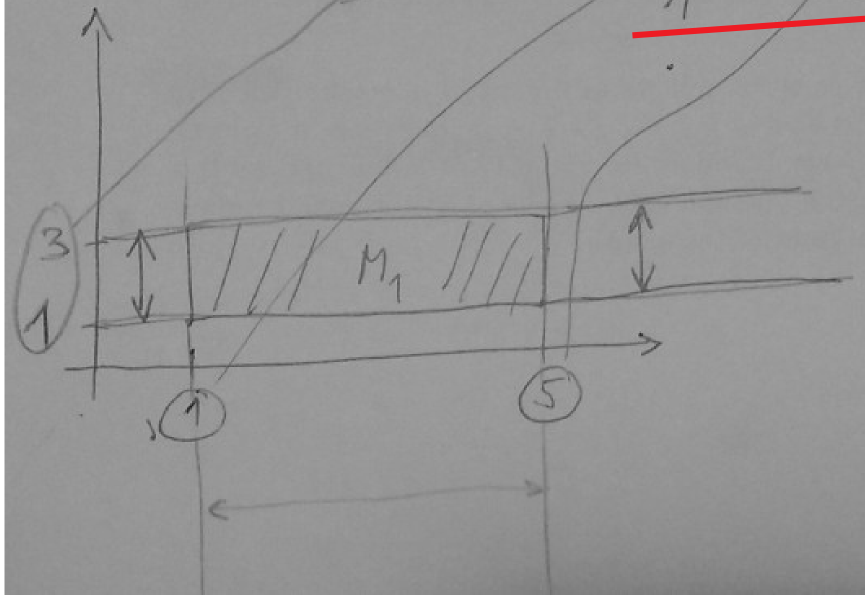
Lze zapsat tutéž mn. M jako EOI_y ?

Ano, ale výrazně složitěji (nedělejte, jen pro ukázku).

↳ Musím M rozřezat na M_1 a M_2, které mají pevné y-ové meze!



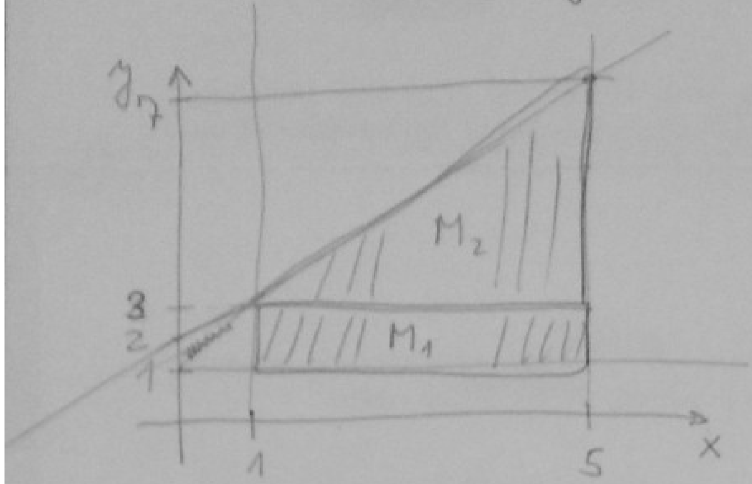
$$\Downarrow \; M_1 = \{ 1 \le y \le 3 \,,\; \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\varphi_1(y)} \le x \le \underset{\substack{\parallel \\ 5}}{\varphi_2(y)} \}$$



Lze zapsat tutéž mn. M jako EOI_y ? (Zvolme $a=1$, $b=5$)

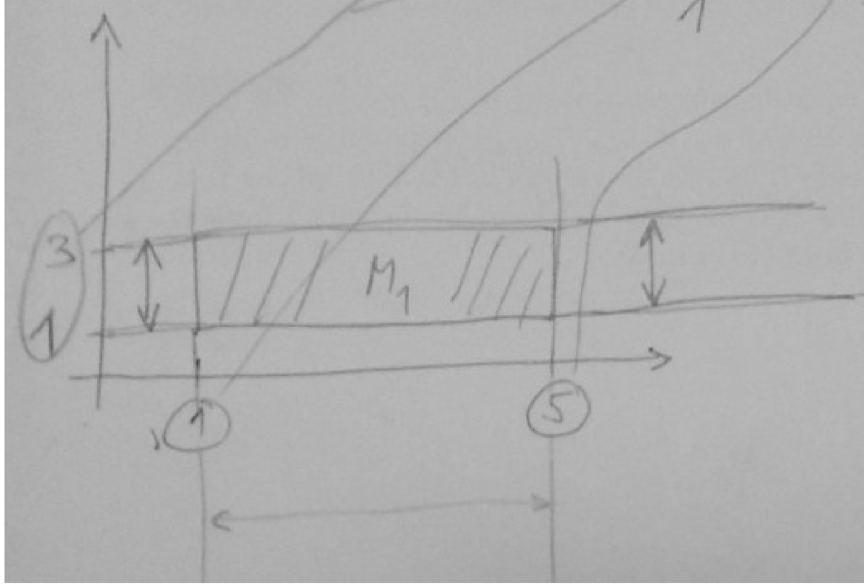
Ano, ale výrazně složitěji (nedělejte, jen pro ukázku).

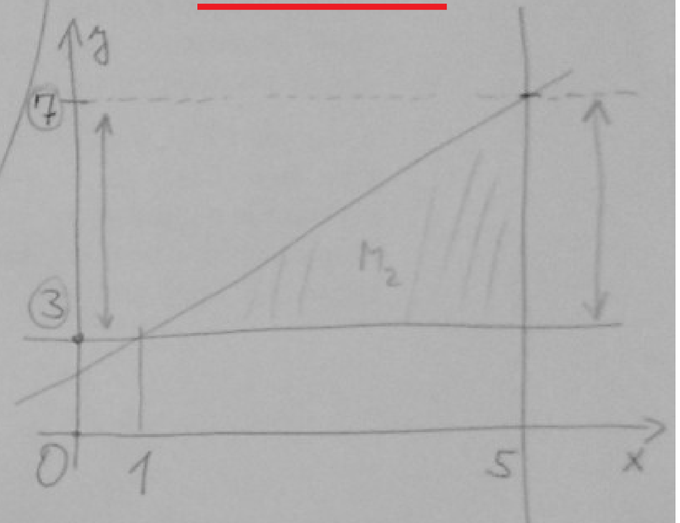
↳ Musím M rozřezat na M_1 a M_2, které mají pevné y-ové meze!



$$\Downarrow \quad M_1 = \{ 1 \le y \le 3,\ \underset{1}{\varphi_1(y)} \le x \le \underset{5}{\varphi_2(y)} \}$$

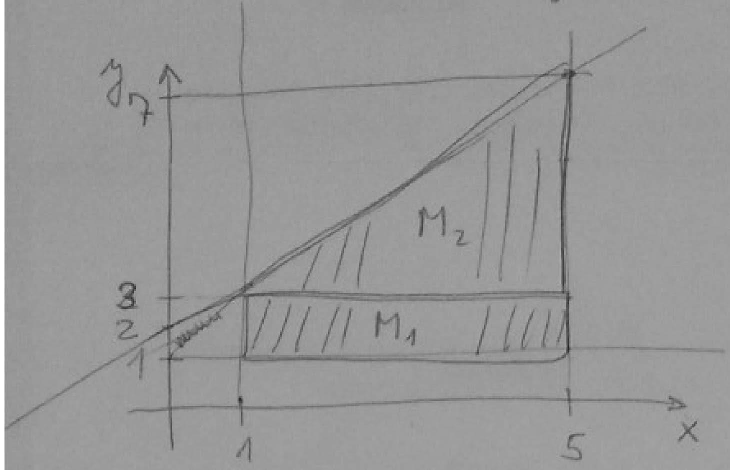
$$M_2 = \{ 3 \le y \le 7,\ \le x \le \ \}$$





[redacted] Lze zapsat tutéž mn. M jako EOI_y ? (Zvolme $a=1$, $b=5$)

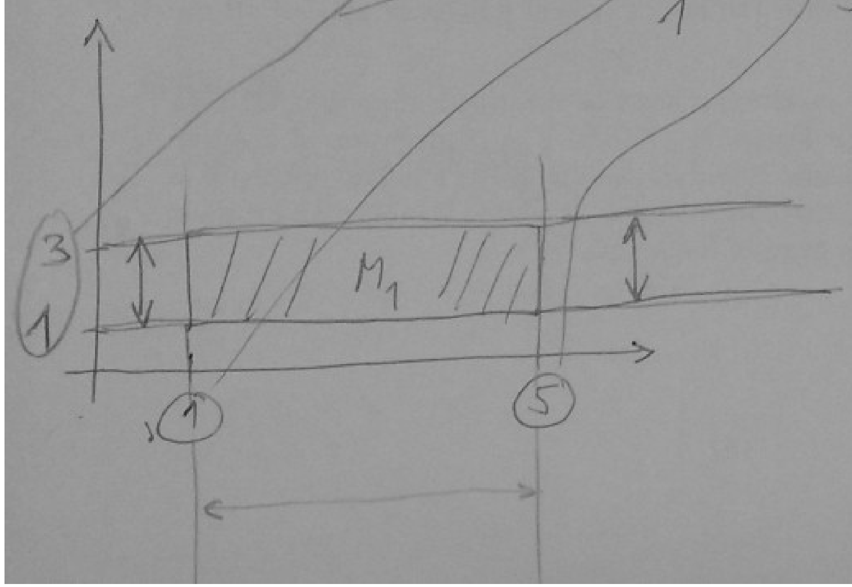
Ano, ale výrazně složitěji (nedělejte, jen pro ukázku).

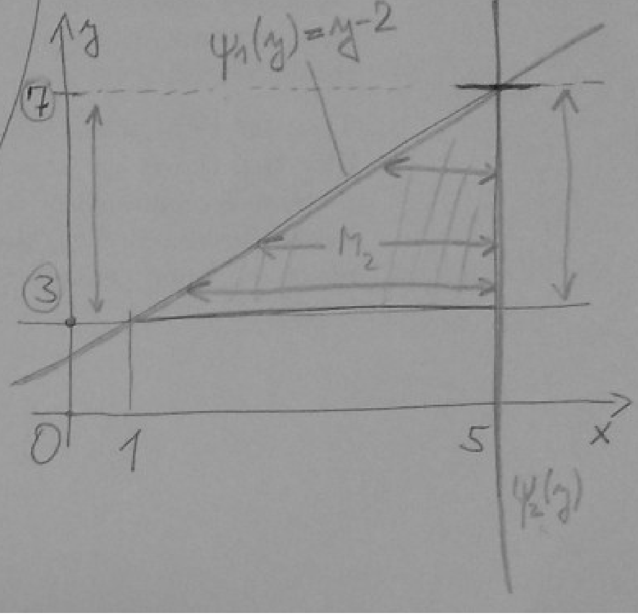


↳ Musím M rozřezat na M_1 a M_2, které mají pevné y-ové meze!

$\Downarrow$ $M_1 = \{1 \le y \le 3,\ \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\varphi_1(y)} \le x \le \underset{\substack{\parallel \\ 5}}{\varphi_2(y)}\}$

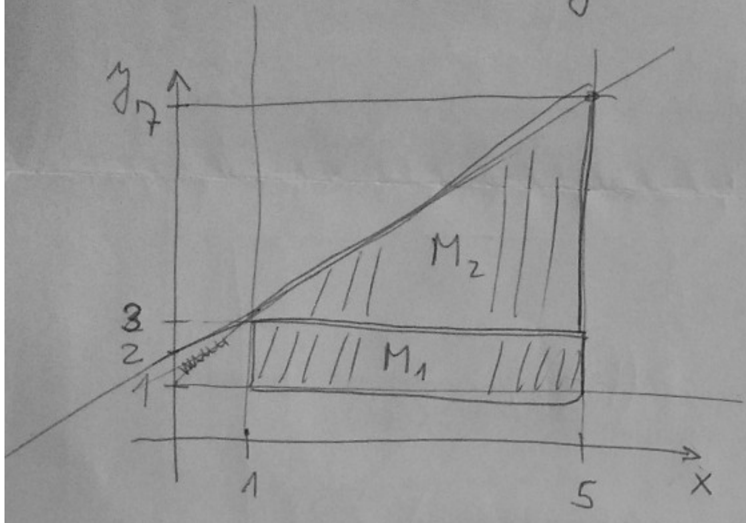
$M_2 = \{3 \le y \le 7,\ \quad \le x \le \quad \}$





Lze zapsat tutéž mn. M jako EOI_y ? (Zvolme $a=1$, $b=5$)

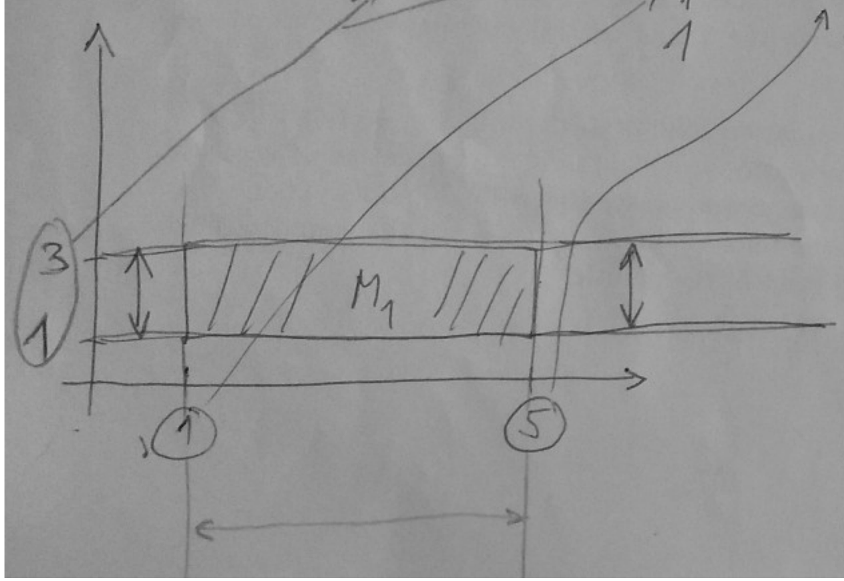
Ano, ale výrazně složitěji (nedělejte, jen pro ukázku).

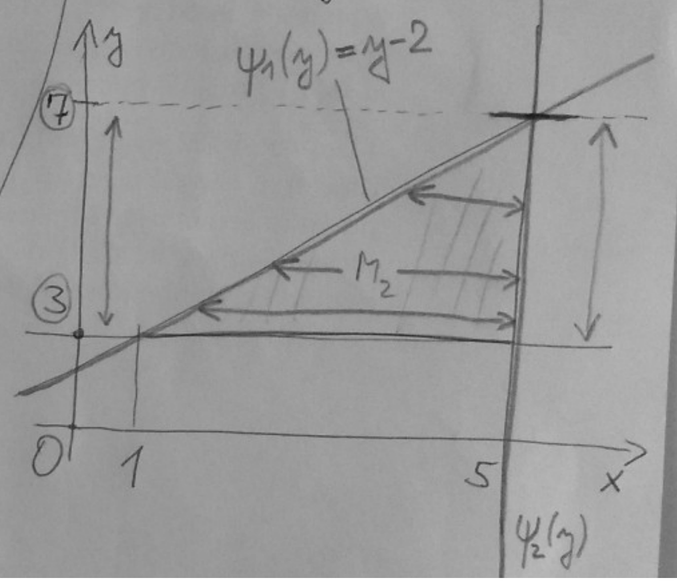


↳ Musím M rozřezat na M_1 a M_2, které mají pevné y-ové meze!

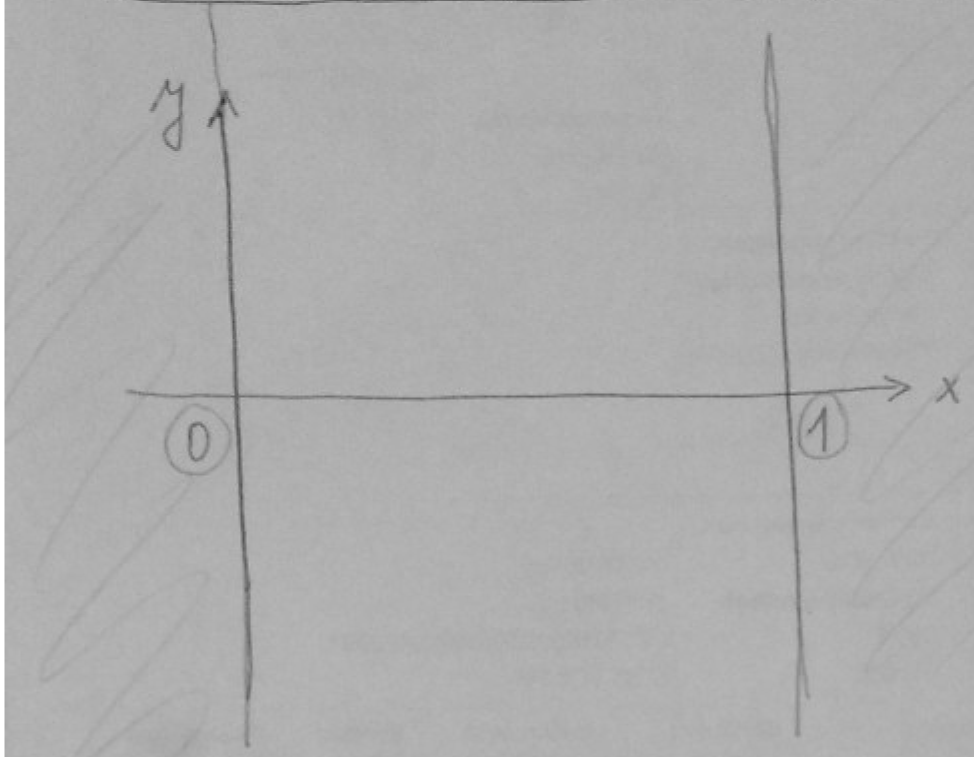
$\Downarrow$ $M_1 = \{1 \le y \le 3,\ \underset{1}{\varphi_1(y)} \le x \le \underset{5}{\varphi_2(y)}\}$

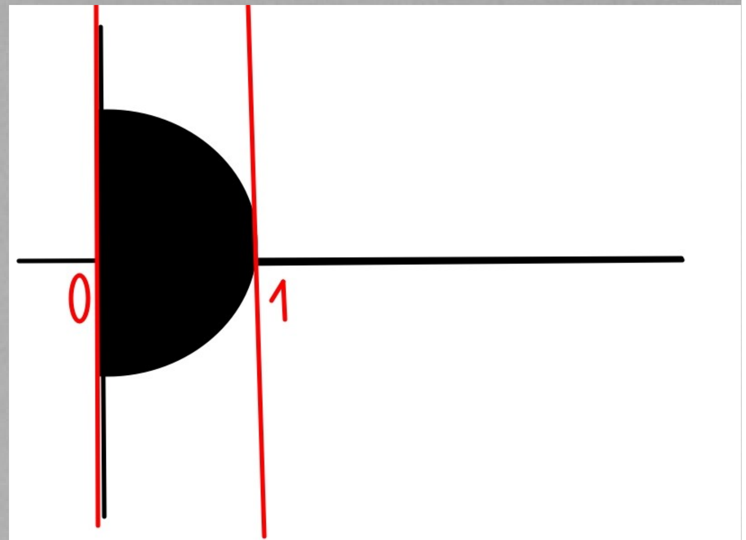
$M_2 = \{3 \le y \le 7,\ y-2 \le x \le 5\}$





② $M = \{\underline{0 \le x \le 1}, -\sqrt{1-x^2} \le y \le +\sqrt{1-x^2}\} = EOI_x$

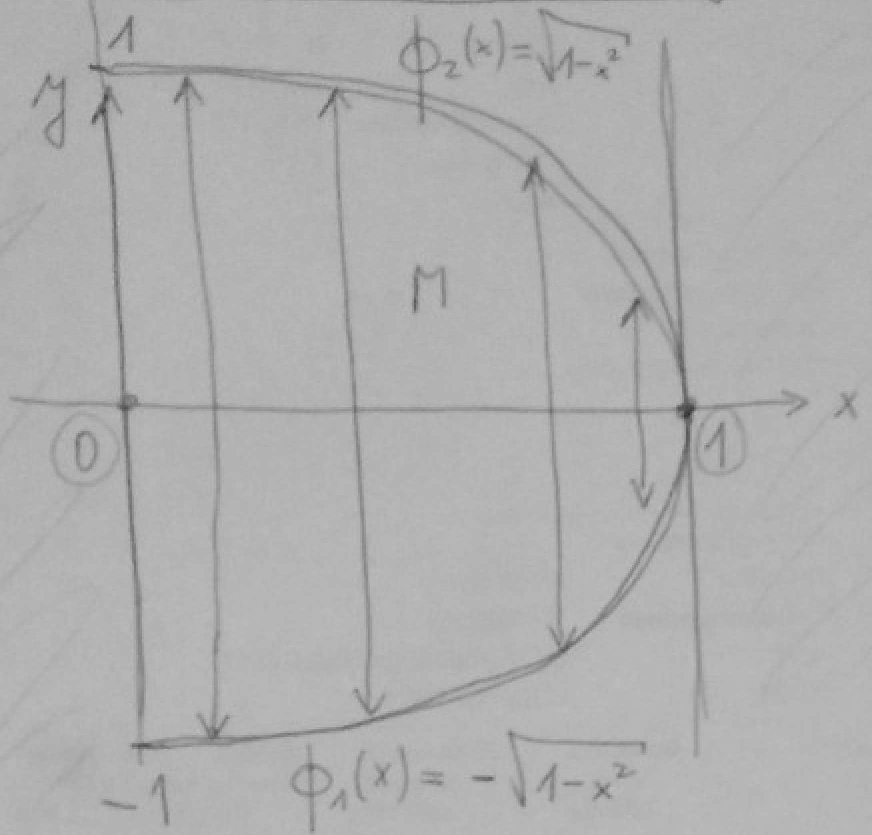


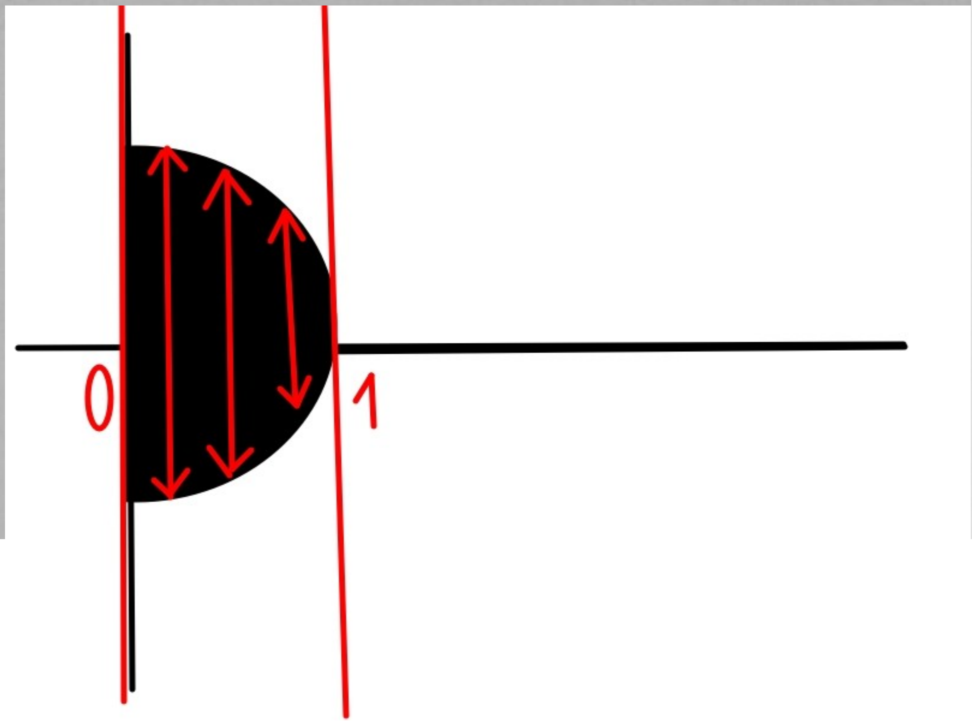


② $$M = \{\underbrace{0 \le x \le 1}, \underline{-\sqrt{1-x^2} \le y \le +\sqrt{1-x^2}}\} = EOI_x$$

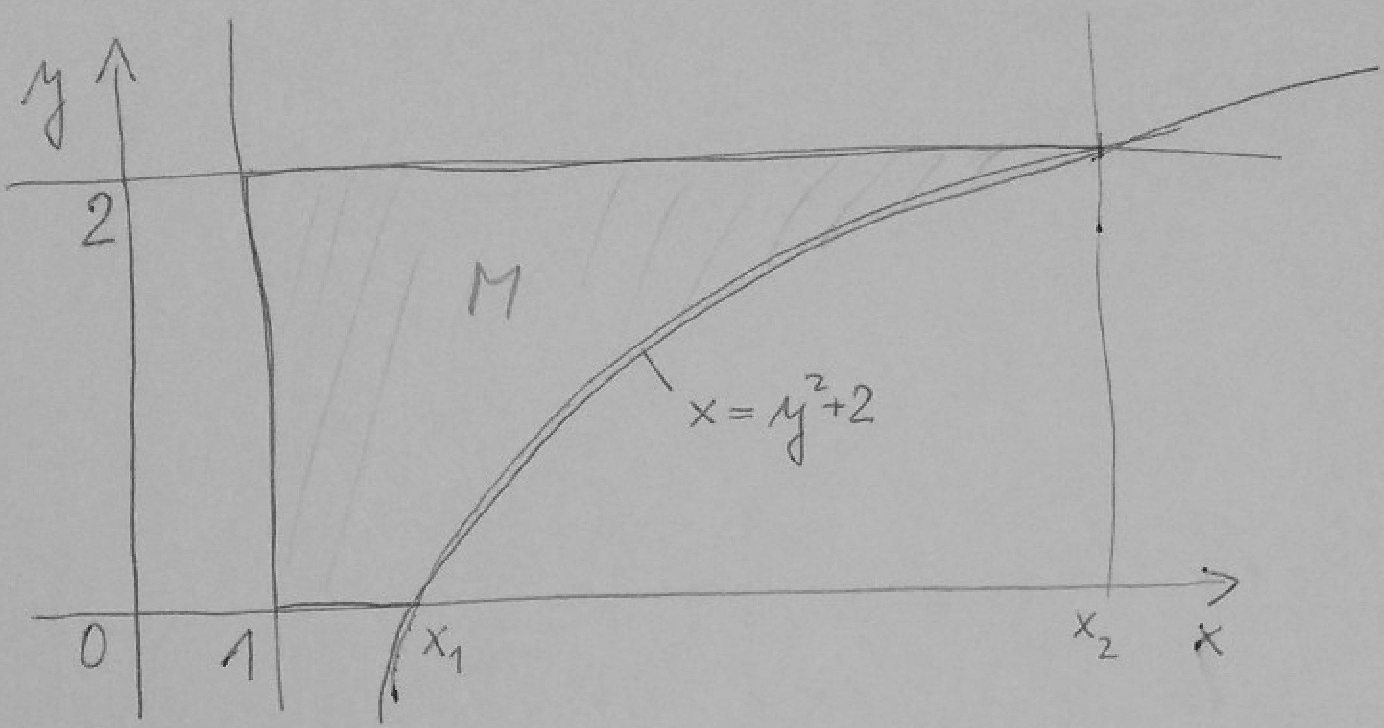
$$y^2 \le 1 - x^2$$

$$\underbrace{x^2 + y^2 \le 1}$$

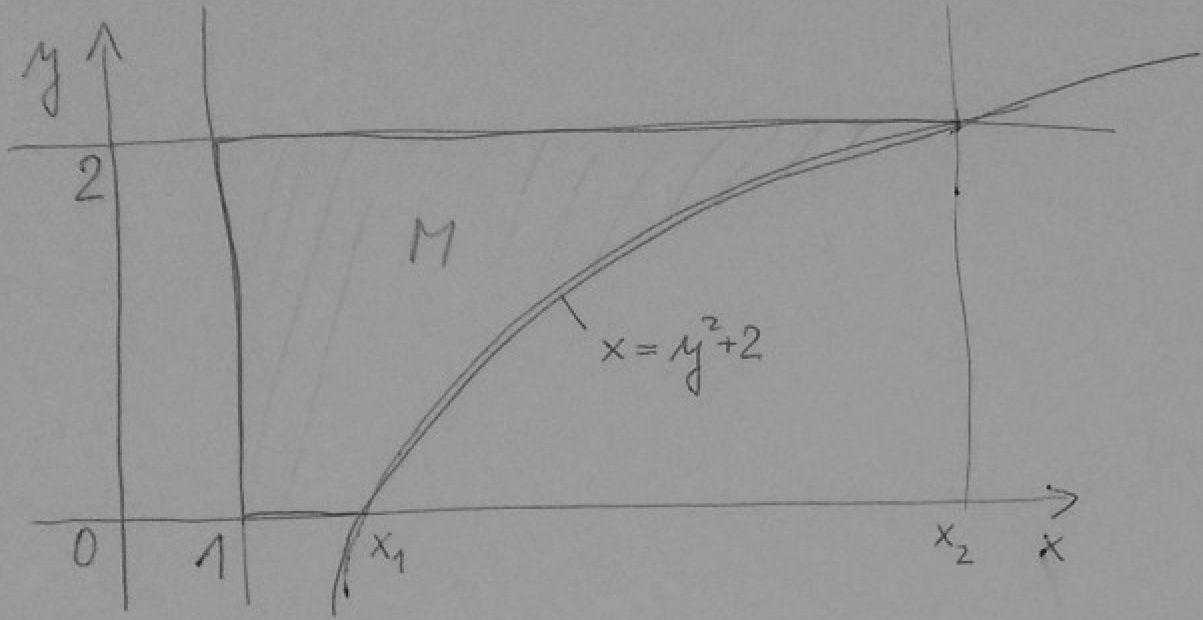




③ M = daná obrázkem → Jak zapsat?



③ M = daná obrázkem → Jak zapsat?



Pevné meze pro y

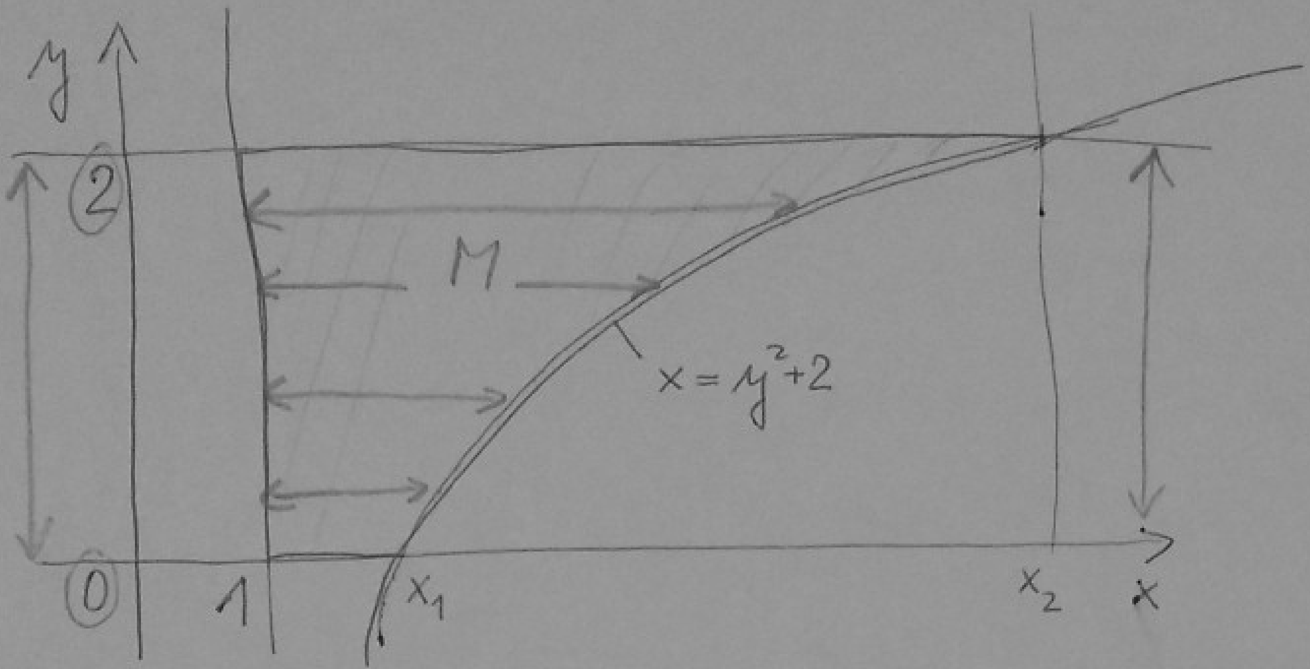
↳ EOI_y

čísla

funkce

$M = \{ \quad \leq y \leq \quad , \quad \leq x \leq \quad \}$

3 M = daná obrázkem → Jak zapsat?



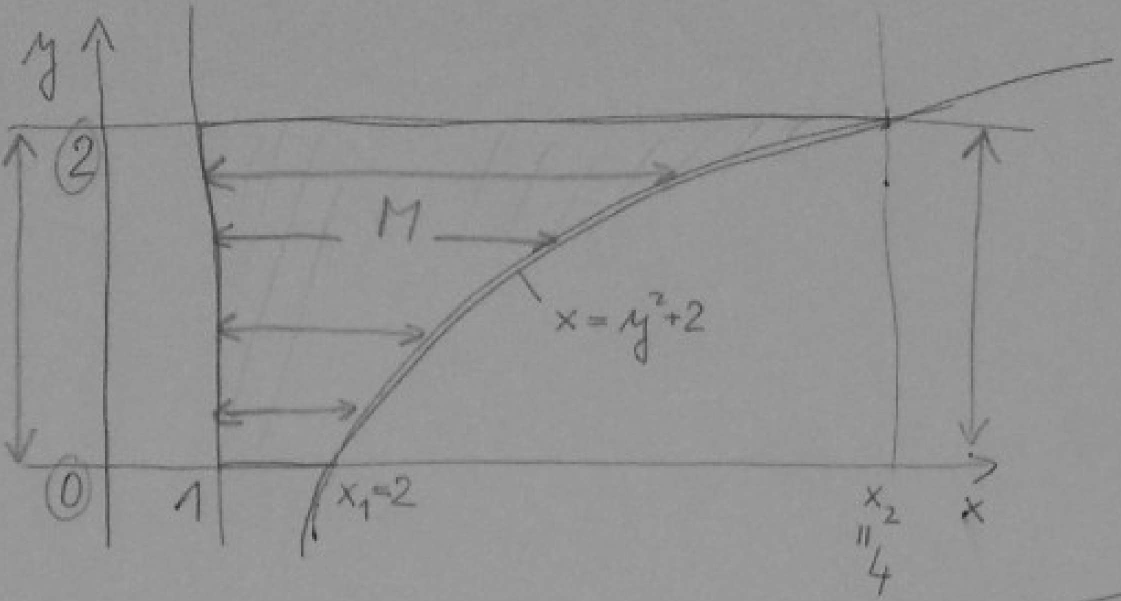
Pevné meze pro y

↳ EOI_y

čísla funkce

$$M = \{0 \le y \le 2 \,,\; 1 \le x \le y^2+2\}$$

③ M = daná obrázkem → Jak zapsat?



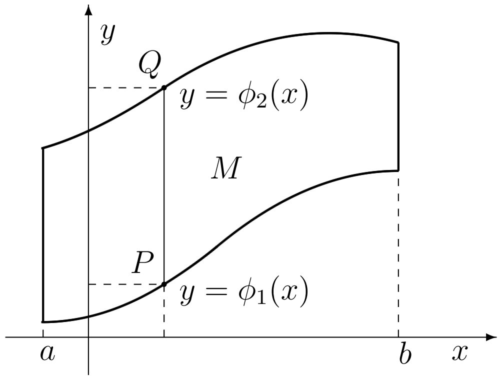
Pevné meze pro y
↳ EOI_y

čísla / funkce

$$M = \{0 \le y \le 2 \;,\; 1 \le x \le y^2+2\}$$

PS:
Zkuste si M zapsat také jako EOI_x. (řešení na konci)

Uvažujme elementární obor integrace vzhledem k ose x.



Obr. 10a

Uvažujme rozdělení množiny M přes niž integrujeme na nekonečně tenké svislé pruhy (úsečky) např $\overline{PQ}$. Je jich nekonečně mnoho.

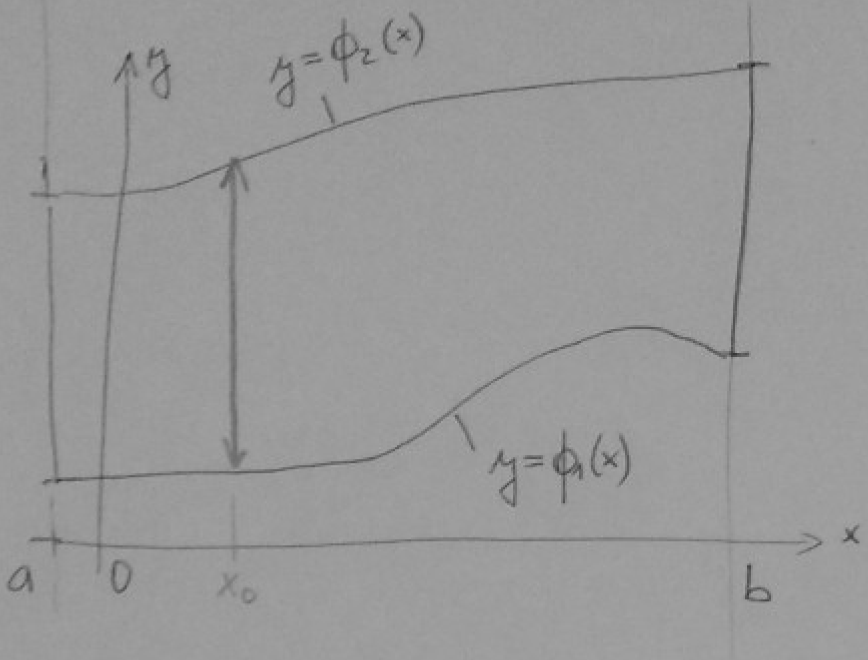
Uvažujme rozdělení množiny M přes niž integrujeme na nekonečně tenké svislé pruhy (úsečky) např $\overline{PQ}$. Je jich nekonečně mnoho.

Nyní integrujme funkci $f(x,y)$ na každé takové úsečce. Protože x je pevné, jedná se tedy o funkci proměnné y.

$$F(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Výsledek samozřejmě závisí na x (pro jaké x to byla úsečka).

Postup integrace při EOI_x (vzhledem k ose x)

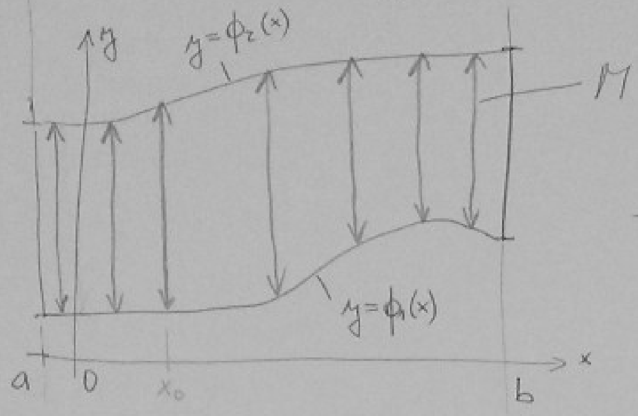


$\longrightarrow$ pro x_0 spočítám

$$F(x_0) = \int_{\phi_1(x_0)}^{\phi_2(x_0)} f(x_0, y)\, dy$$

Pro $x = x_0$ můžu naintegrovat f-ci $f(x,y)$ přes y, protože je v x konstantní. Integruji mezi $\phi_1(x_0) \leq y \leq \phi_2(x_0)$.

Postup integrace při EOI_x (vzhledem k ose x)



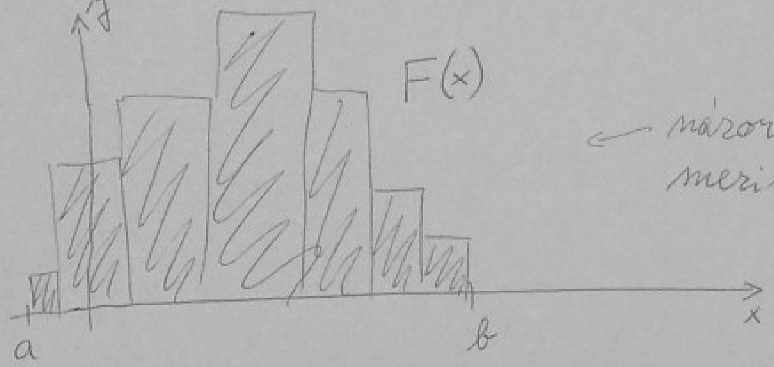
pro x_0 spočítám

$$F(x_0) = \int_{\phi_1(x_0)}^{\phi_2(x_0)} f(x_0,y)\,dy$$

Pro $x=x_0$ musím naintegrovat f-ci $f(x,y)$ přes y, protože je v x konstantní. Integruji mezi $\phi_1(x_0) \le y \le \phi_2(x_0)$.

Totéž zopakuji pro všechny řezy s konst. x.

Tak získám mezivýsledek pro každé x. ($a \le x \le b$).



← názorná ilustrace mezivýsledku (nepřesná a částečně zavádějící)

A ten pak už jen zintegruji podél x.

Uvažujme rozdělení množiny M přes niž integrujeme na nekonečně tenké svislé pruhy (úsečky) např $\overline{PQ}$. Je jich nekonečně mnoho.

Nyní integrujme funkci $f(x,y)$ na každé takové úsečce. Protože x je pevné, jedná se tedy o funkci proměnné y.

$$F(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Výsledek samozřejmě závisí na x (pro jaké x to byla úsečka).

Pak sečtu výsledky přes všech nekonečně úseček = integruju $F(x)$ jako funkci proměnné x od a do b.

Zformulujeme to jako větu:

Fubiniho věta

Věta (Fubiniho věta pro dvojný integrál). a) *Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k ose x. Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá v M. Pak*

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

b) *Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k ose y. Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá v M. Pak*

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Integrálům na pravé straně (jsou to dva jednoduché integrály) se říká *dvojnásobné*. Tj. Fubiniho věta převádí dvojný integrál na dvojnásobný.

Příklady na dvojný integrál

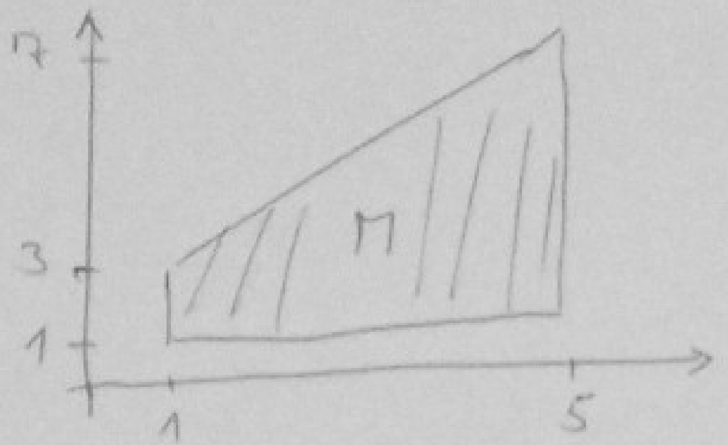
Na tabuli.

Plošný obsah rovinného obrazce

Na tabuli.

Př.:

$M = \{ 1 \le x \le 5,\ 1 \le y \le 2+x \} \rightarrow$ viz ①

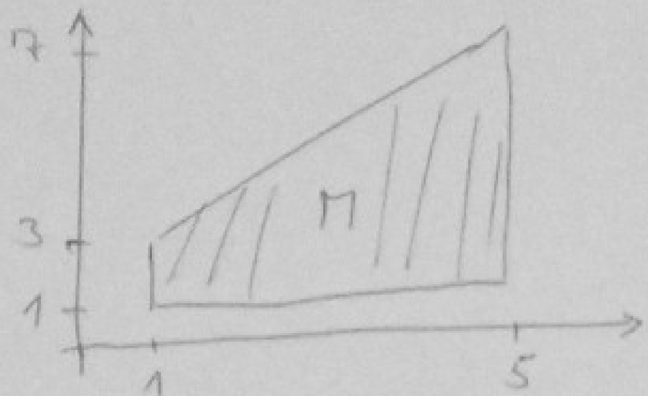


$$I = \iint_M (x+y)\, dx\, dy = ?$$

M je $EOI_x \Rightarrow$ $$I = \int_1^5 \left(\int_1^{2+x} (x+y)\, dy \right) dx =$$

Př.:

$$M = \{1 \leq x \leq 5,\ 1 \leq y \leq 2+x\} \rightarrow \text{viz } ①$$



$$I = \iint_M (x+y)\,dx\,dy = ?$$

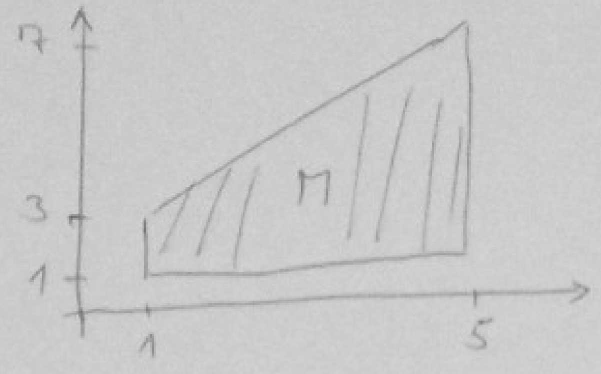
M je $EDI_x \Rightarrow$ $$I = \int_1^5 \left(\int_1^{2+x} (x+y)\,dy \right) dx =$$

integruji přes y — vztahují se k y!

$$= \int_1^5 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^{2+x} dx = \int_1^5 \left(x\cdot(2+x) + \frac{(2+x)^2}{2} - x - \frac{1}{2} \right) dx =$$

Př.:

$$M = \{1 \leq x \leq 5,\ 1 \leq y \leq 2+x\} \to \text{viz } (1)$$



$$I = \iint_M (x+y)\, dx\, dy = ?$$

M je $EDI_x \Rightarrow$ $$I = \int_1^5 \left(\int_1^{2+x} (x+y)\, dy \right) dx =$$

integruji přes y

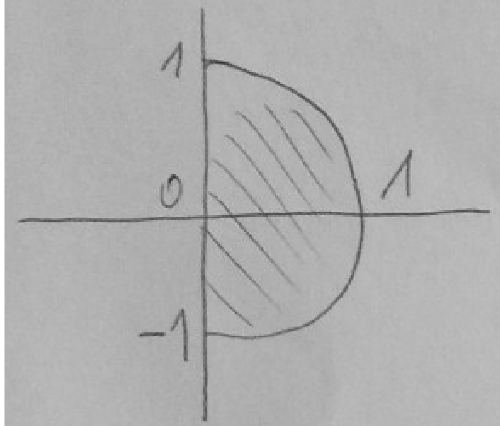
vztahuji se ke y!

$$= \int_1^5 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^{2+x} dx = \int_1^5 \left(x\cdot(2+x) + \frac{(2+x)^2}{2} - x - \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \int_1^5 2x + x^2 + \frac{4+4x+x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\, dx = \int_1^5 \frac{3x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\, dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int_1^5 x^2 + 2x + 1\, dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_1^5 = \frac{3}{2} \cdot \frac{208}{3} = \underline{\underline{104}}$$

$S = ?$ Mala 2



$$S = \iint_M 1\,dx\,dy \Rightarrow M = \{0 \le x \le 1 \,;\, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} 1\,dy \right) dx = \int_0^1 [y]_{-\sqrt{\ }}^{+\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \cos t \\ dx = -\sin t\,dt \\ 1 \to 0 \\ 0 \to \pi/2 \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\pi/2}^{0} 2\sqrt{(\sin^2 t+\cos^2 t)-\cos^2 t}\,\left(-\sin t\,dt\right) =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \sqrt{\sin^2 t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt =$$

$$= \cancel{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{\cancel{2}}\,dt = \left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\pi/2}}$$

$$\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\pi/2}^{0} 2\sqrt{(\sin^2 t+\cos^2 t)-\cos^2 t}\,\left(-\sin t\,dt\right) =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin t\cdot\sqrt{\sin^2 t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt =$$

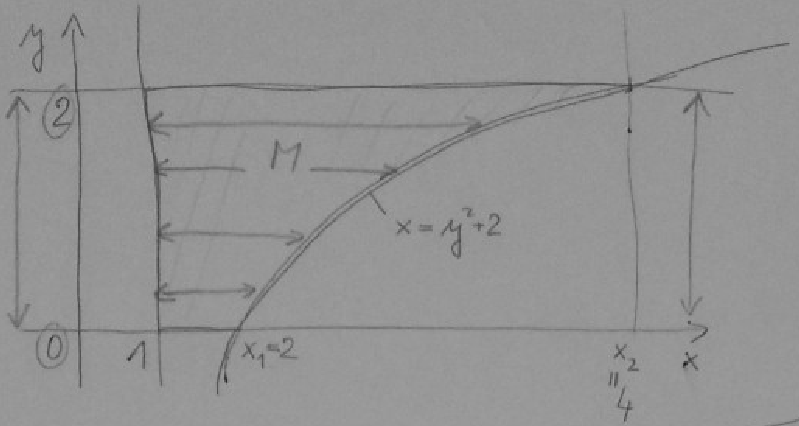
$$= \cancel{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{\cancel{2}}\,dt = \left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\pi/2}}$$

<u>PS:</u>

Zkuste si spočítat první příklad s f-cí $f(x,y) = x$.

Řešení 1

3 M = daná obrázkem → Jak zapsat?



Pevné meze pro y

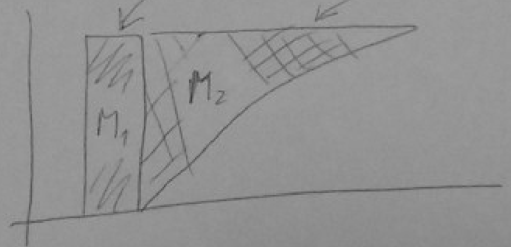
↳ EDI_y

$$M = \{\underbrace{0 \le y \le 2}_{\text{čísla}},\ \underbrace{1 \le x \le y^2+2}_{\text{funkce}}\}$$

PS: Zkus si M zapsat také jako EDI_x. (řešení na konci)

↳ $M = \{1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\} \cup \{2 \le x \le 4,\ \sqrt{x-2} \le y \le 2\}$

$x \le y^2+2 \Leftrightarrow y \ge \sqrt{x-2}$



Řešení 2

$$\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\pi/2}^{0} 2\sqrt{(\sin^2 t+\cos^2 t)-\cos^2 t}\,(-\sin t\,dt) =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin t\cdot\sqrt{\sin^2 t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt =$$

$$= \cancel{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{\cancel{2}}\,dt = \left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\pi/2}}$$

PS:

Zkusk si spočítat první příklad s f-cí $f(x,y)=x$.

$$\hookrightarrow \quad \iint_M x\,dxdy = \int_1^5\left(\int_1^{2+x} x\,dy\right)dx = \int_1^5 [xy]_1^{2+x}\,dx =$$

$$= \int_1^5 x^2+x\,dx = \left[x^3/3+x^2/2\right]_1^5 = \frac{160}{3}.$$