Matematika II – přednáška 11

Co bude dneska?

Polární souřadnice v $\mathbb{E}_2$.

Transformace dvojného integrálu do polárních souřadnic.

Aplikace na příklady. Podrobnější pohled na transformaci souřadnic.

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska11.pdf$
(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

Věta (Fubiniho věta pro dvojný integrál). a) *Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k ose x. Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá v M. Pak*

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

b) *Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k ose y. Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá v M. Pak*

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Počítání konkrétních příkladů a výpočet fyzikálních a mechanických charakteristik desky.

Polární souřadnice v E_2

Motivační příklad.

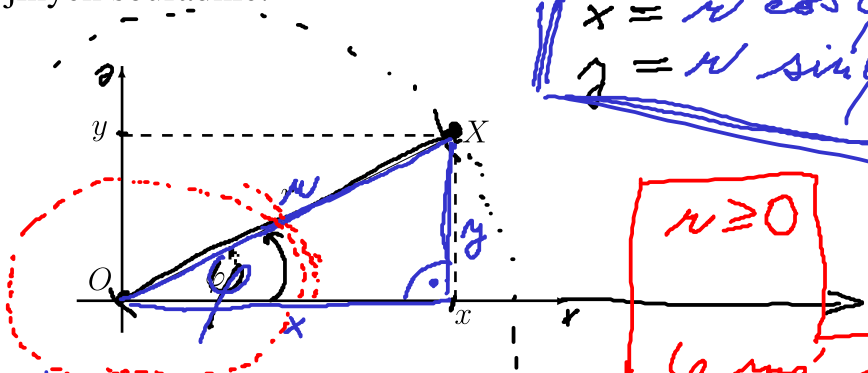
Jak jinak můžeme popsat polohu bodu v rovině. Je to vlastně obdoba substituční metody (změnila funkci a obor integrace), zde se soustředíme jak změnit obor integrace. Říká se tomu transformace do jiných souřadnic.

$X = [x, y]$

$[r, \varphi]$

$x = r \cos \varphi$

$y = r \sin \varphi$



Obr. polární souřadnice

$r \geq 0$

φ má max interval o délce 2π

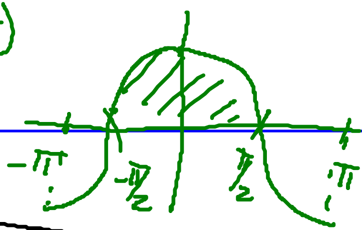
$\to \varphi$ typicky $\in \langle 0, 2\pi)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{y}{x}$

alternativně (B) $= \text{pro } \varphi \in \langle -\pi, \pi)$

$\varphi \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$



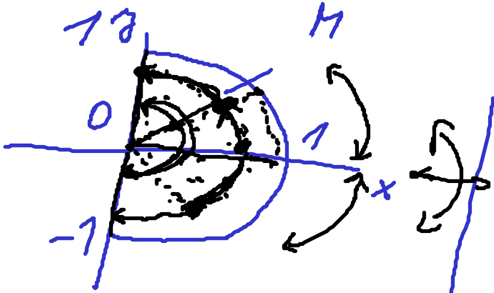
Polární souřadnice v E_2

$$M = \{ x \geq 0, \; x^2+y^2 \leq 1 \}$$

$$S = \iint_M 1 \, dx\, dy$$

... EOI$_x$ ... dy ... dx

Motivační příklad.



M popište v polárních souřadnicích

$$x = r \cos\varphi$$
$$y = r \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad r \in \; ? \quad \varphi \in \; ? \quad \langle 0, 2\pi)$$

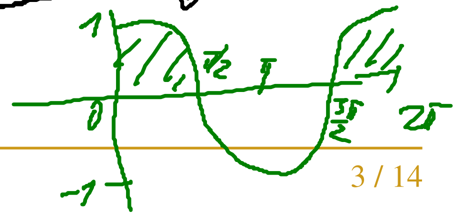
$$0 \leq r \leq 1$$

$$\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle \cup \langle \tfrac{3\pi}{2}, 2\pi) \quad \text{NEBO } \varphi \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle \quad (B)$$

(A) $x = r\cos\varphi \geq 0 \overset{r\geq 0}{\Longrightarrow} \boxed{\cos\varphi \geq 0}$

$$x^2+y^2 = \underbrace{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}_{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad r^2 \leq 1, \quad \boxed{r \leq 1}$$

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

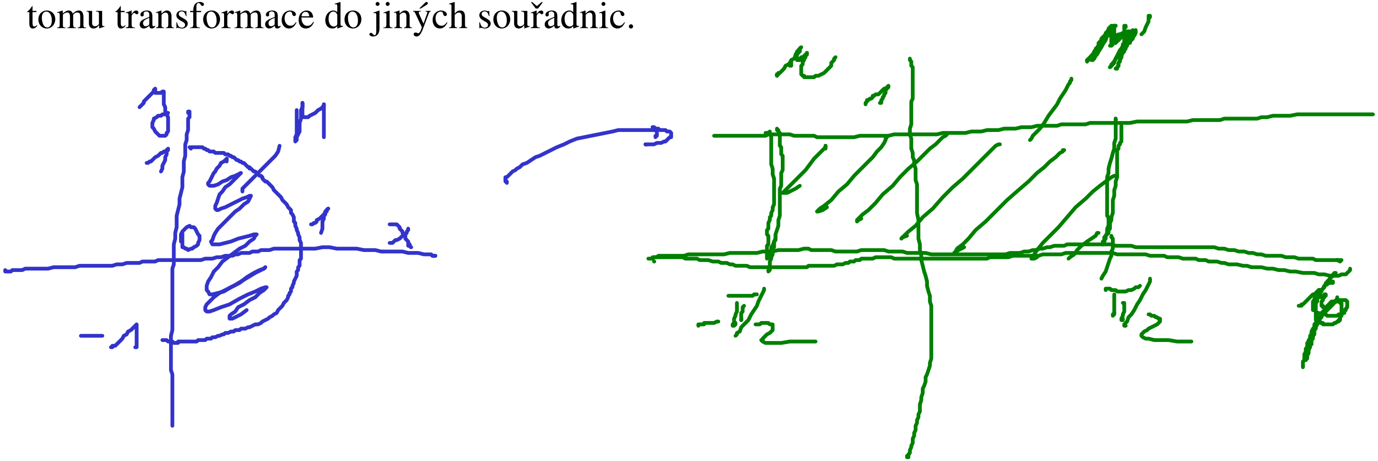


Polární souřadnice v E_2

$$M' = \left\{ [r,\varphi] \in E_2 \;\middle|\; 0 \le r \le 1,\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2 \right\}$$

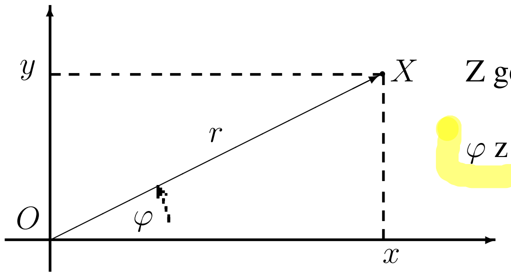
Motivační příklad.

Jak jinak můžeme popsat polohu bodu v rovině. Je to vlastně obdoba substituční metody (změnila funkci a obor integrace), zde se soustředíme jak změnit obor integrace. Říká se tomu transformace do jiných souřadnic.



Definice (Polární souřadnice v $\mathbb{E}_2$.). *Polohu bodu $X \in \mathbb{E}_2$ můžeme jednoznačně určit jeho polárními souřadnicemi r, φ, které mají tento geometrický význam: r je vzdálenost X od počátku O a φ je úhel mezi kladnou částí osy x a úsečkou $\overline{OX}$ (měřený od osy x k úsečce $\overline{OX}$). Vztah mezi kartézskými souřadnicemi x, y a polárními souřadnicemi r, φ je dán rovnicemi*

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$



Z geometrie plyne:

φ z intervalu delky max 2π

$r \geq 0$

Obr. polární souřadnice

Transformace dvojného integrálu do polárních souřadnic

Chci spočíst integrál

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{M'} f^*(r,\varphi)\, \underline{r\,dr\,d\varphi}$$

Nahradím x a y výrazy $\underline{r\ \cos\,\varphi}$ a $\underline{r\ \sin\,\varphi}$.

1) popsat M v pol. souřadnicích $\Rightarrow M'$

2) přepsat $f(x,y)$ do proměnných r a φ $\Rightarrow f^*(r,\varphi)$

3) přepočítat diferenciály

$$\boxed{dx\,dy = r\,dr\,d\varphi}$$

Transformace dvojného integrálu do polárních souřadnic

Chci spočíst integrál

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy$$

Nahradím x a y výrazy $r\ \cos\,\varphi$ a $r\ \sin\,\varphi$.

Je však třeba ještě

a) popsat obor integrace M v polárních souřadnicích a starý popis (v kartézských souřadnicích) zaměnit novým popisem (v polárních souřadnicích),

b) dosadit vhodný výraz do dvojného integrálu za $dx\,dy$ (podobně, jako když při substituci $x = g(t)$ v jednorozměrném integrálu dosazujeme $dx = g'(t)\,dt$).

Množina M odpovídá množině M' v polárních souřadnicích (M' je vlastně popis množiny M v pol. souř.).

Výraz $dx\,dy$ je třeba při transformaci do polárních souřadnic nahradit takto:

$$dx\,dy = r\,dr\,d\varphi.$$

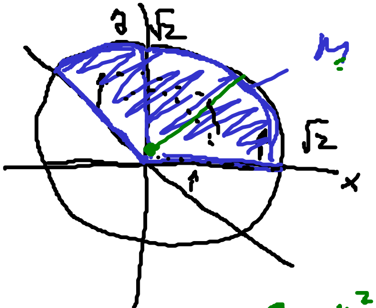
Činitel r na pravé straně je tzv. “jakobián” (zkratka pro “Jacobiho determinant”).

Transformace dvojného integrálu do polárních souřadnic má smysl tehdy, pokud vede ke zjednodušení integrované funkce nebo ke zjednodušení popisu oboru integrace. (Příklady).

$M:$ $\quad y \geq 0 \quad y \geq -x \quad x^2+y^2 \leq 2$

$f(x,y) = y \to r\sin\varphi$

$f^*(r,\varphi) = (r)\sin\varphi$



$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$J = r$

$M' = \{[r,\varphi] \mid 0 \leq r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}\}$

- $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi \leq 2$

$r^2 \leq 2$

$0 \leq r \leq \sqrt{2}$

- $r\sin\varphi \geq 0$

$\sin\varphi \geq 0$

- $r\sin\varphi \geq -r\cos\varphi$

$\sin\varphi \geq -\cos\varphi$

$\varphi \in \langle 0, \frac{3\pi}{4} \rangle$

$I = \iint_M y\,dx\,dy = ?$

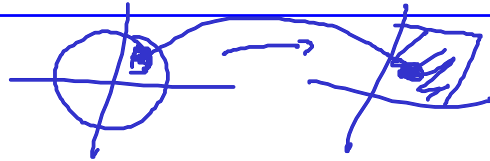
$= \iint_{M'} f^* \, r\,dr\,d\varphi = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\frac{3\pi}{4}} r\sin\varphi \cdot r \, d\varphi \right) dr$

$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\frac{3\pi}{4}} r^2 \sin\varphi \, d\varphi \right) dr = \int_0^{\sqrt{2}} \left(r^2 \int_0^{3\pi/4} \sin\varphi \, d\varphi \right) dr = \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \, dr \cdot \int_0^{3\pi/4} \sin\varphi \, d\varphi$

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{3\pi/4} r^2 \sin\varphi \, d\varphi \right) dr = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\left[-r^2 \cos\varphi \right]_0^{3\pi/4} \right) dr =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} -r^2 \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)}_{-\frac{2+\sqrt{2}}{2}} dr = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \, dr = (\quad) \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{\cancel{2}} \, \frac{1}{3} \underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^3}_{\cancel{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \left(2+\sqrt{2} \right) \sqrt{2} > 0$$



Podrobnější pohled na transformaci souřadnic

Na tabuli:

M1: $x = \underbrace{g(t)}_{= t^2} \longrightarrow dx = g'(t)\,dt$

$dx = 2t \cdot dt$

$x = \Phi_1(r,\varphi) = r\cos\varphi$

$y = \Phi_2(r,\varphi) = r\sin\varphi$

$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \cos\varphi \cdot 1 \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} = r\cdot(-\sin\varphi)$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$

$J(r,\varphi) \neq 0$ uvnitř M $\longleftrightarrow$ r

Zobecněné polární souřadnice

Co když nemá kruh střed v počátku? Co když to bude elipsa?

$$(x-1)^2+(y-2)^2 \le 4$$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \mapsto (r\cos\varphi-1)^2+(r\sin\varphi-2)^2 \le 4$$

$$r^2\cos^2 - 2r\cos + 1 + r^2\sin^2 - 4r\sin + 4 \le 4$$

$$r^2 - r(2\cos\varphi + 4\sin\varphi) \le -1$$

Fůj – r závisí na φ!

Zobecnění

$$x = x_0 + r\cos\varphi$$
$$y = y_0 + r\sin\varphi$$

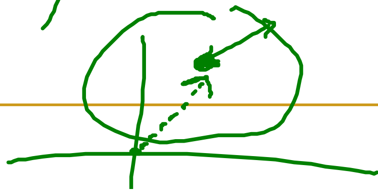
Př:

$$= 1 + r\cos\varphi$$
$$= 2 + r\sin\varphi$$

$$(\cancel{1}+r\cos-\cancel{1})^2 + (\cancel{2}+r\cos\varphi-\cancel{2})^2 \le 4$$

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \le 4$$

$$r \le 2$$



Zobecněné polární souřadnice

Co když nemá kruh střed v počátku? Co když to bude elipsa?

Tyto souřadnice mají podobný geometrický význam, jako polární souřadnice, avšak jejich počátek nemusí být stejný jako počátek v kartézských souřadnicích (kruh se středem mimo počátek).

Rovněž nejsou "izotropní", tj. míra změny r ve směru osy x a ve směru osy y se může lišit (elipsa).

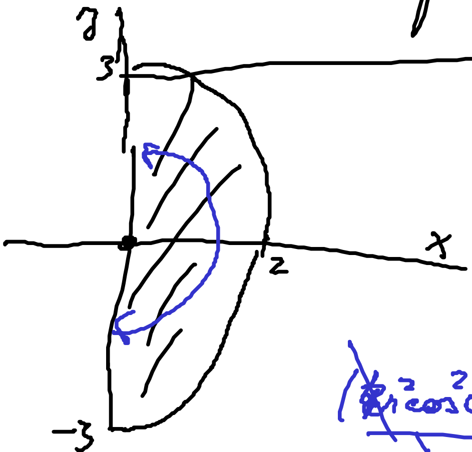
$$x = x_0 + ar \cos \varphi, \quad y = y_0 + br \sin \varphi,$$

přičemž $[x_0, y_0]$ je zvolený bod v $\mathbb{E}_2$ a a, b jsou zvolené kladné konstanty.

Pak je (tj. jakobián, ukážeme když bude čas):

$$dx\,dy = rab\,dr\,d\varphi.$$

Př: Plocha půlelipsy: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1$, $x\ge 0$



$x = x_0 + a\,r\cos\varphi \quad = 0+2r\cos\varphi$

$y = y_0 + b\,r\sin\varphi \quad = 0+3r\sin\varphi$

$$\frac{4r^2\cos^2\varphi}{4}+\frac{9r^2\sin^2\varphi}{9}\le 1 \qquad \boxed{0\le r\le 1}$$

$$r^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1}\le 1$$

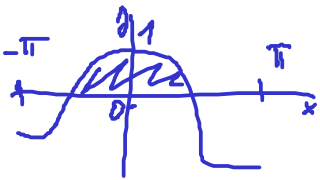
$J = ab\cdot\pi$

$\boxed{J = 2\cdot 3\cdot\pi = 6\pi}$

$x\ge 0$

$2r\cos\varphi\ge 0$

$\cos\varphi\ge 0$



$\Rightarrow \boxed{\varphi\in\langle -\pi/2, \pi/2\rangle}$

$$S = \iint_M 1\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \cdot 6r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^1 \left(6r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,d\varphi\right) dr = 6\int_0^1 r \cdot \left(\underbrace{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}_{\pi}\right) dr =$$

$$= 6\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{6\pi}{2} = 3\pi$$