Matematika II – přednáška 12

Co bude dneska?

Dělení kvádru a jeho norma.

Riemanovy součty a jejich limita.

Trojný integrál na kvádru a na obecné množině v $\mathbb{E}_3$.

Měřitelná množina a Jordanova míra.

Základní vlastnosti a Fubiniho Věta.

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska12.pdf$
(pro osobní potřeby).

Polární souřadnice

- zachovávají úhly

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$J = r$$

Zobecněné polární souř.

- deformují úhly → rozmezí pro φ třeba spočítat!
- r nemá význam vzdálenosti!

$$x = x_0 + a\, r\cos\varphi$$
$$y = y_0 + b\, r\sin\varphi$$
$$J = ab \cdot r$$

Dělení kvádru a jeho norma

Nechť $K = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle e, f\rangle$ je kvádr v $\mathbb{E}_3$ takový, jehož hrany jsou rovnoběžné se souřadnými osami x, y a z.

Definice (Dělení kvádru a jeho norma.). *Kvádr K lze rozdělit sítí rovin rovnoběžných s rovinami xy, xz nebo yz na n dílčích kvádrů $K_1, \dots, K_n$. Systém těchto kvádrů nazýváme dělení kvádru K. Pojmenujeme-li popsané dělení D, pak normou dělení D nazýváme délku nejdelší ze všech hran kvádrů $K_1, \dots, K_n$. Normu dělení D značíme $\|D\|$. Jsou-li délky hran dílčích kvádrů $K_1, \dots, K_n$ rovny Δx_1, Δy_1, Δz_1, $\dots$, Δx_n, Δy_n, Δz_n, můžeme normu $\|D\|$ vyjádřit:*

$$\|D\| = \max\{\Delta x_1; \Delta y_1; \Delta z_1; \dots ; \Delta x_n; \Delta y_n; \Delta z_n\}.$$

Riemanovy součty a jejich limita

Nechť je $f(x, y, z)$ omezená funkce na kvádru $K = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle e, f\rangle$. Nechť je D zmíněné dělení kvádru K. Označme Δx_1, Δy_1, $\Delta z_1, \dots,$ Δx_n, Δy_n, Δz_n délky stran kvádrů $K_1, \dots, K_n$ dělení D. Nechť $\mathcal{V}$ je systém zvolených bodů $Z_i \in K_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Definice (Riemanovy součty a jejich limita.). *Riemannovým součtem funkce f na kvádru K, odpovídajícím dělení D a systému $\mathcal{V}$ vybraných bodů $Z_1, \dots, Z_n$, nazýváme součet*

$$s(f, D, \mathcal{V}) = \sum_{i=1}^{n} f(Z_i) \cdot \Delta x_i \, \Delta y_i \, \Delta z_i.$$

Říkáme, že číslo S je limitou Riemannových součtů $s(f, D, \mathcal{V})$ pro $\|D\| \to 0+$, jestliže ke každému zvolenému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D kvádru K a pro každý zvolený systém $\mathcal{V}$ platí:

$$\|D\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |s(f, D, \mathcal{V}) - S| < \epsilon.$$

a píšeme:

$$\lim_{\|D\| \to 0+} s(f, D, \mathcal{V}) = S.$$

Trojný integrál na kvádru

Definice (trojný integrál na kvádru.). *Jestliže předchozí limita existuje, pak její hodnotu S nazýváme trojným integrálem funkce f na kvádru K. Tento integrál obvykle značíme*

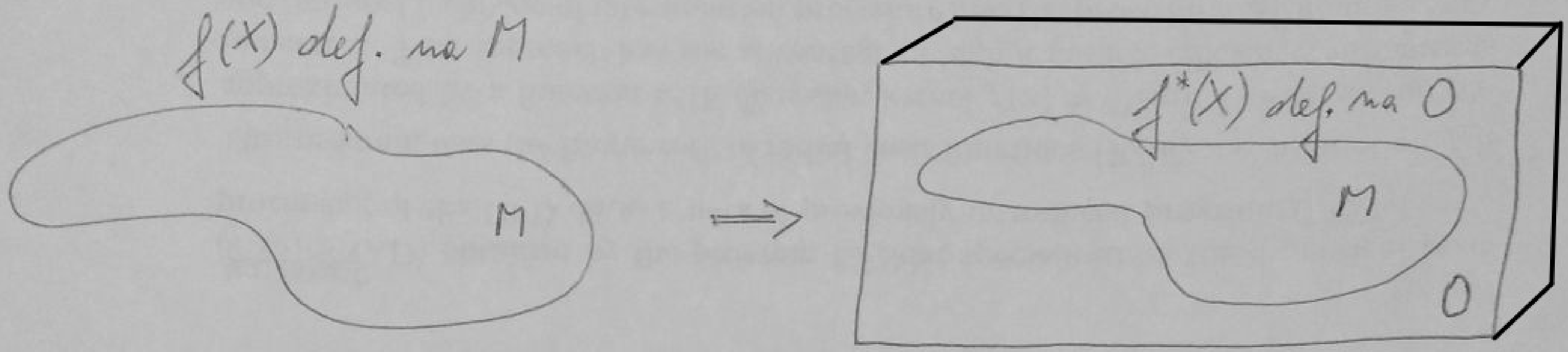
$$\iiint_K f(x,y)\,dx\,dy\,dz \qquad \text{nebo} \qquad \iiint_K f\;dx\,dy\,dz.$$

Jestliže limita existuje, říkáme, že "trojný integrál $\iiint_K f\;dx\,dy\,dz$ existuje" nebo že "funkce f je integrovatelná na kvádru K".

Dělení obecné množiny

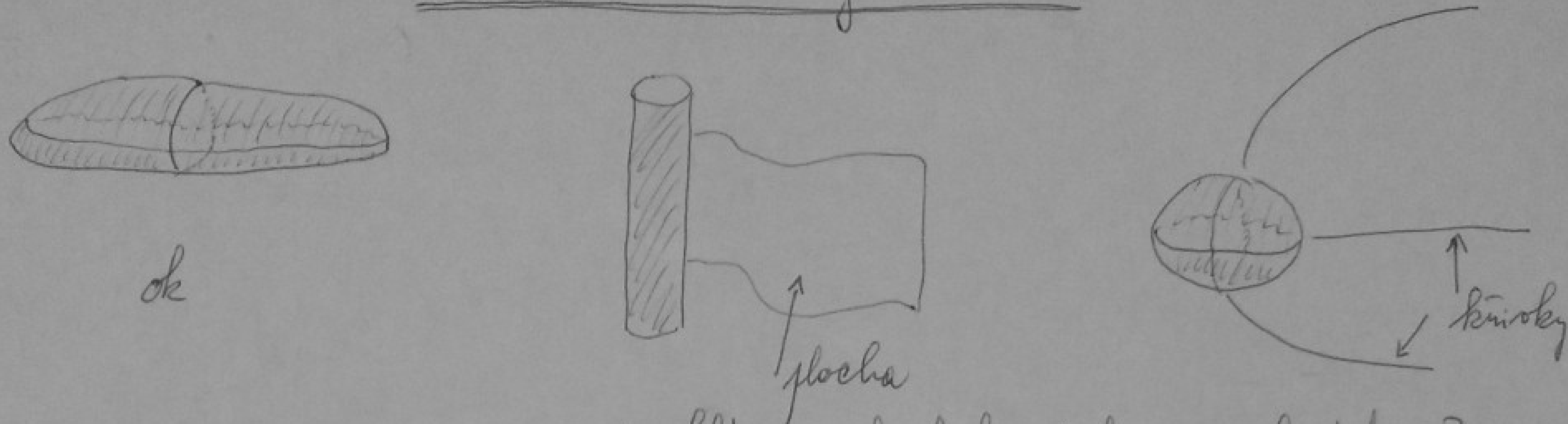
Využijeme stejnou konstrukci i pro integraci obecné množiny $M \subset \mathbb{E}_3$.
Jen najdeme kvádr O, aby $M \subset O$.
A rozšíříme definici f-ce $f(x,y,z)$ na O, tj. $f \to f^*$ tak, že

$$f^*(X) = \begin{cases} f(X) & X \in M. \\ 0 & X \notin M, \text{ tj. } X \in O \setminus M. \end{cases}$$



to už umíme!
(integrovat)

Obecné množiny v $\mathbb{E}_3$



problém – jak plochu (křivky) pokryju kvádry?

$\Rightarrow$ Proto Jordanova míra (μ_3).

Měřitelná množina v $\mathbb{E}_3$ a její Jordanova míra

Definice (Měřitelná množina v $\mathbb{E}_3$.). *Předpokládejme, že M je omezená množina v $\mathbb{E}_3$. Říkáme, že množina M je **měřitelná** (v Jordanově smyslu), jestliže konstantní funkce $f(x,y,z) = 1$ je integrovatelná na M. V tomto případě nazýváme hodnotu*

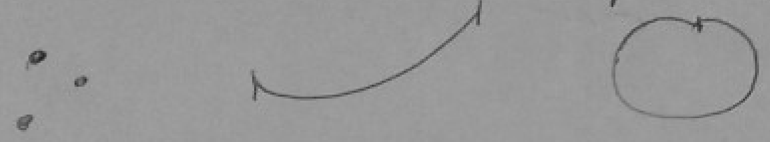
$$\mu_3(M) \; = \; \iiint_M dx\, dy\, dz$$

***třírozměrnou Jordanovou mírou** množiny M.*

$\mu_3(M)$ má názorný geometrický význam: Definuje a poskytuje návod jak vypočítat *objem* množiny M.

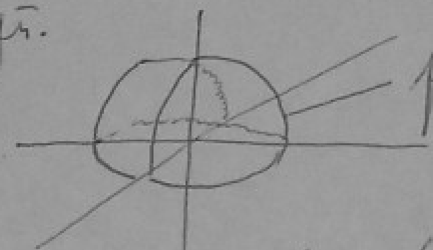
Množiny míry nula (ve $\mathbb{E}_3$)

a) M, které jsou i míry nula pro μ_2 (tj. $\mu_2(M) = 0$)



b) graf f-ce $f(x,y)$, kde $[x,y] \in$ uzavřené mn.

např.



polovina kulové plochy

c) hladké plochy (případně po částech hl. fl.)

– plášť válce

Množiny jejichž trojrozměrná míra je nula (”nemají”objem): Množiny konečného počtu bodů a křivek. Plochy (grafy funkcí) definované na uzavřených podmnožinách v $\mathbb{E}_3$. Jednoduché hladké plochy (bude později).

Věta. a) *Sjednocení konečně mnoha množin míry nula je množina míry nula.*
b) *Je-li N množina míry nula a $M \subset N$, pak M je také množina míry nula.*

Věta (Nutná a postačující podmínka pro to, aby množina v $\mathbb{E}_3$ byla měřitelná.). *Množina $M \subset \mathbb{E}_3$ je měřitelná (v Jordanově smyslu) právě tehdy, je-li omezená a* $\mu_3(\partial M) = 0$.

Věta (Postačující podmínka pro existenci trojného integrálu.). *Nechť* M *je měřitelná množina v* $\mathbb{E}_3$ *a* f *je omezená a spojitá funkce na* M*. Pak trojný integrál* $\iiint_M f\,dx\,dy\,dz$ *existuje.*

***Příklad* 239**. Vyšetřete, zda existují trojné integrály :

a) $\displaystyle\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+z)^3}, \quad W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 0,\ -2 \le z \le 2\},$

b) $\displaystyle\iiint_W (x+yz)\,dx\,dy\,dz, \quad W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 \le y \le 2,\ z \ge 3\},$

c) $\displaystyle\iiint_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2-9}\,dx\,dy\,dz, \quad W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : 1 < x^2+y^2+z^2 < 4\}.$

Řešení :

***Příklad* 239**. Vyšetřete, zda existují trojné integrály :

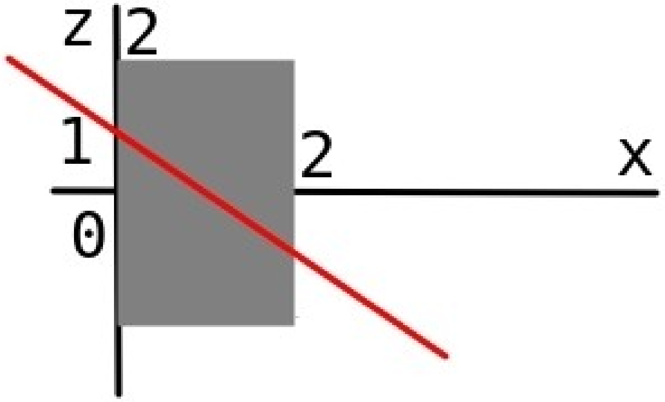
a) $\displaystyle\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+z)^3}, \quad W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 0,\ -2 \le z \le 2\},$

b) $\displaystyle\iiint_W (x+yz)\,dx\,dy\,dz, \quad W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 \le y \le 2,\ z \ge 3\},$

c) $\displaystyle\iiint_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2-9}\,dx\,dy\,dz, \quad W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : 1 < x^2+y^2+z^2 < 4\}.$

Řešení :

a) neexistuje, protože funkce $\displaystyle\frac{1}{(1+x+z)^3}$ není omezená na W, $\{1+x+z=0\} \cap W \ne \emptyset$,



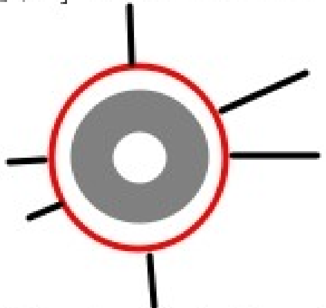
***Příklad* 239**. Vyšetřete, zda existují trojné integrály :

a) $\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+z)^3}, \quad W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 0,\ -2 \le z \le 2\},$

b) $\iiint_W (x+yz)\,dx\,dy\,dz, \quad W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 \le y \le 2,\ z \ge 3\},$

c) $\iiint_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2-9}\,dx\,dy\,dz, \quad W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : 1 < x^2+y^2+z^2 < 4\}.$

Řešení :



a) neexistuje,

b) neexistuje,

c) existuje; W je měřitelná množina v $\mathbb{E}_3$; $x^2+y^2+z^2-9 \neq 0$ ve W, tedy integrovaná funkce je spojitá na W; $\frac{1}{8} < \left|\frac{1}{x^2+y^2+z^2-9}\right| < \frac{1}{5}$ pro každý bod $[x,y,z] \in W$, tedy funkce je omezená na W. ■

Některé vlastnosti trojného integrálu

a) **Linearita trojného integrálu.** *Jsou-li funkce f a g integrovatelné na množině $M \subset \mathbb{E}_3$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak*

$$\iiint_M (f+g)\, dx\, dy\, dz = \iiint_M f\, dx\, dy\, dz + \iiint_M g\, dx\, dy\, dz,$$

$$\iiint_M \alpha \cdot f\, dx\, dy\, dz = \alpha \cdot \iiint_M f\, dx\, dy\, dz.$$

Některé vlastnosti trojného integrálu

a) **Linearita trojného integrálu.** *Jsou-li funkce f a g integrovatelné na množině $M \subset \mathbb{E}_3$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak*

$$\iiint_M (f+g)\, dx\, dy\, dz \;=\; \iiint_M f\; dx\, dy\, dz + \iiint_M g\; dx\, dy\, dz,$$

$$\iiint_M \alpha \cdot f\; dx\, dy\, dz \;=\; \alpha \cdot \iiint_M f\; dx\, dy\, dz.$$

b) **Aditivita trojného integrálu vzhledem k oboru integrace.** *Nechť jsou M_1 a M_2 měřitelné množiny v $\mathbb{E}_3$, takové, že $\mu_3(M_1 \cap M_2) = 0$, a f je integrovatelnou funkcí na M_1 i na M_2, pak*

$$\iiint_{M_1} f\; dx\, dy\, dz + \iiint_{M_2} f\; dx\, dy\, dz \;=\; \iiint_{M_1 \cup M_2} f\; dx\, dy\, dz.$$

Některé vlastnosti trojného integrálu

c) Nechť f je integrovatelná funkce na množině $M \in \mathbb{E}_3$ a omezená funkce g se liší od f nejvýše na množině míry nula v M, pak g je také integrovatelná funkce v M a

$$\iiint_M g \, dx \, dy \, dz = \iiint_M f \, dx \, dy \, dz.$$

Některé vlastnosti trojného integrálu

c) Nechť f je integrovatelná funkce na množině $M \in \mathbb{E}_3$ a omezená funkce g se liší od f nejvýše na množině míry nula v M, pak g je také integrovatelná funkce v M a

$$\iiint_M g\,dx\,dy\,dz = \iiint_M f\,dx\,dy\,dz.$$

d) Je-li f omezená funkce na množině $M \in \mathbb{E}_3$ míry nula, pak f je integrovatelná na M a

$$\iiint_M f\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Některé vlastnosti trojného integrálu

e) Jsou-li f a g integrovatelné funkce na množině $M \subset \mathbb{E}_3$ takové, že $f(x,y,z) \geq g(x,y,z) \ \forall\, [x,y,z] \in M$, pak

$$\iiint_M f \; dx\, dy\, dz \;\geq\; \iiint_M g \; dx\, dy\, dz.$$

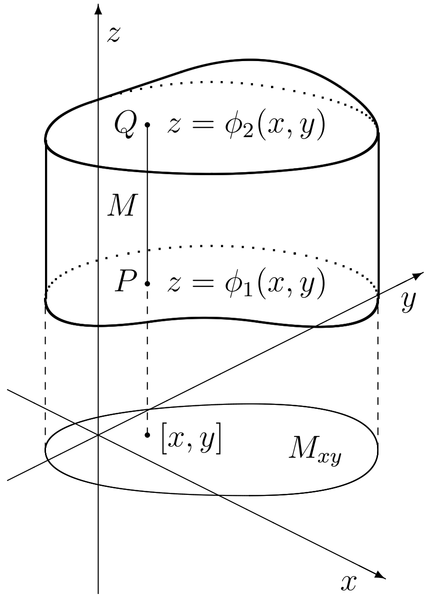
Speciálně, je-li $f(x,y,z) \geq 0 \ \forall\, [x,y,z] \in M$, pak

$$\iiint_M f \; dx\, dy\, dz \;\geq\; 0.$$

Definice (Elementární obor integrace v $\mathbb{E}_3$.). *Nechť* M_{xy} *je měřitelná uzavřená množina v* $\mathbb{E}_2$ *a* $z = \phi_1(x,y)$ *a* $z = \phi_2(x,y)$ *jsou spojité funkce na* M_{xy} *takové, že* $\phi_1(x,y) \leq \phi_2(x,y)$ *pro všechna* $[x,y] \in M_{xy}$. *Pak množinu*

$$M = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ [x,y] \in M_{xy}, \\ \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y)\big\}$$

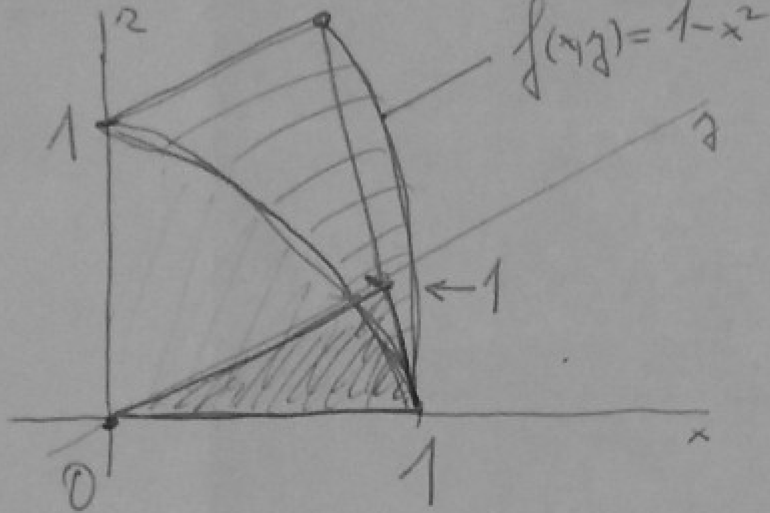
Elementární obor integrace



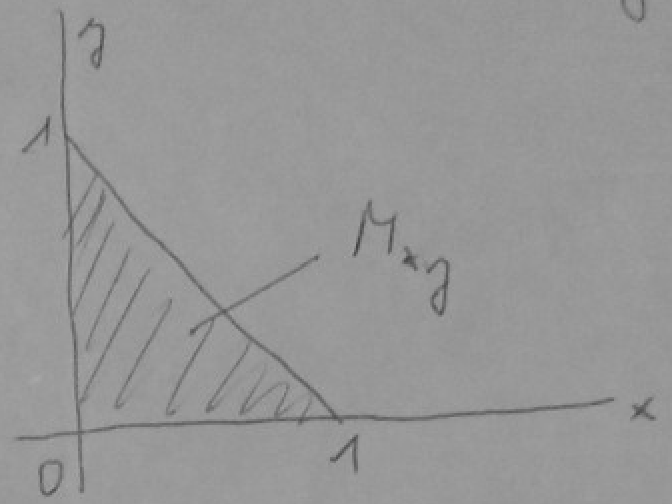
Obrázek ze skript M II

Př.:

Popište jako EOI_{xy} načrtnuté těleso:



Průmět do roviny xy:



$$M = \{ [x, y, z] \in E^3 \mid 0 \le z \le 1 - x^2 ,\ [x, y] \in M_{xy} \}$$

$$M_{xy} = \{ 0 \le x \le 1 ,\ 0 \le y \le 1 - x \}$$

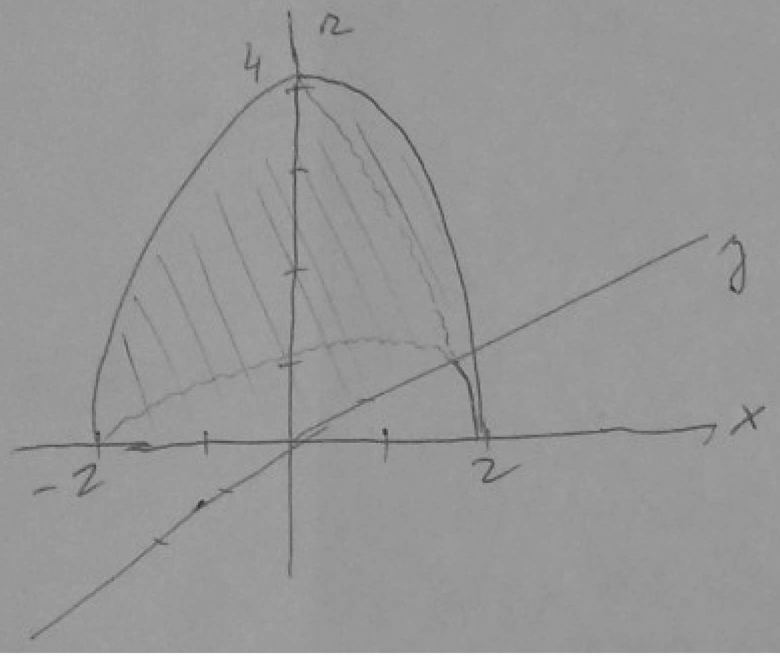
Př.:

Nakreslete a popište $D = \{[x,y,z] \in E_3 \mid 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2, y \ge 0\}$

$z \le 4 - x^2 - y^2$ paraboloid

$0 \le 4 - x^2 - y^2 \iff x^2 + y^2 \le 4$ omezený kružnicí (válec ve 3D)

$y \ge 0 \rightarrow$ polovina



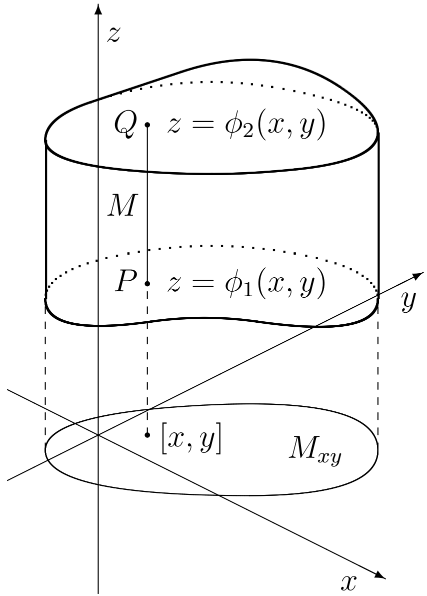
Definice (Elementární obor integrace v $\mathbb{E}_3$.). *Nechť M_{xy} je měřitelná uzavřená množina v $\mathbb{E}_2$ a $z = \phi_1(x,y)$ a $z = \phi_2(x,y)$ jsou spojité funkce na M_{xy} takové, že $\phi_1(x,y) \leq \phi_2(x,y)$ pro všechna $[x,y] \in M_{xy}$. Pak množinu*

$$
\begin{aligned}
M \;=\; & \big\{ [x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ [x,y] \in M_{xy}, \\
& \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y) \big\}
\end{aligned}
$$

Obdobně by se definovali elementární obory integrace vzhledem k rovinnám xz a yz.

Myšlenka věty: Obor integrace M rozdělíme na nekonečně mnoho svislých úseček. Jednou z nich je úsečka $\overline{PQ}$. Nejprve integrujeme funkci f na každé z těchto úseček jako funkci jedné proměnné z – dostáváme $F(x,y) = \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz$. Výsledek závisí na x a na y, protože poloha úsečky $\overline{PQ}$ závisí na x a na y. Pak integrujeme $F(x,y)$ jakožto funkci dvou proměnných x a y na množině M_{xy}.

Elementární obor integrace



Obrázek ze skript M II

Fubiniho věta pro trojný integrál

Věta (Fubiniho věta pro trojný integrál.). *Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k rovině xy, definovaný v odstavci II.7.1. Nechť $f(x,y,z)$ je spojitá funkce na M. Pak*

$$\iiint_M f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{M_{xy}} \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy.$$

Obdobně by se formulovala věta pro integraci na elementárním oboru integrace vzhledem k rovině xz či yz.

Příklady.

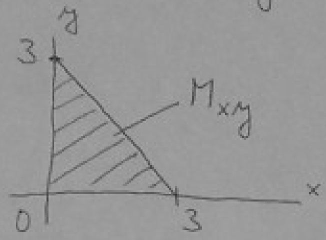
Př.:

Vypočítejte integrál $\iiint_W 1 \, dx\,dy\,dz$, kde W je čtyřstěn omezený rovinami $x=0$, $y=0$, $z=0$ a $x+y+3z=3$.

→ EOI_{xy}:

průmět tělesa do roviny x-y:

$z=0 \rightarrow x+y=3 \Leftrightarrow y=3-x$



$M_{xy} = \{[x,y] \in E_2 \mid 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3-x\}$

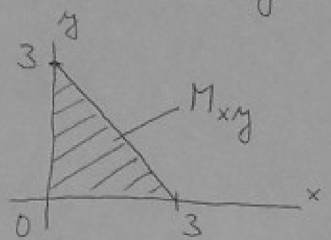
Př.:

Vypočítejte integrál $\iiint\limits_W 1 \, dx\,dy\,dz$, kde W je čtyřstěn omezený rovinami $x=0$, $y=0$, $z=0$ a $x+y+3z=3$.

→ EOI_{xy}:

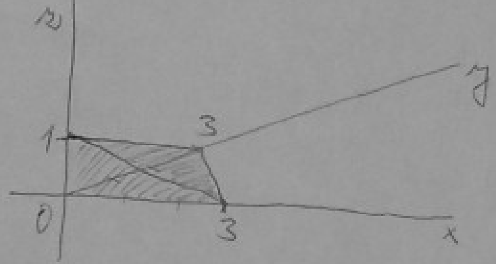
průmět tělesa do roviny x-y:

$z=0 \rightarrow x+y=3 \Leftrightarrow y=3-x$



$M_{xy} = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 \mid 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3-x\}$

Čtyřstěn (průsečík $z=1$ dostanu po dosazení $x=y=0$)



$W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 \mid 0 \leq z \leq 1-\frac{x+y}{3}\ \forall [x,y] \in M_{xy}\}$

$= \{ \text{—}\|\text{——} \mid 0 \leq z \leq 1-\frac{x+y}{3},\ 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3-x\}$

$$W = \left\{ -\|- \;\middle|\; 0 \le z \le 1 - \frac{x+y}{3},\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3-x \right\}$$

Celkem

$$I = \iint_{M_{xy}} \left(\int_0^{\frac{3-x-y}{3}} 1 \, dz \right) dx\, dy = \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} \left(\int_0^{\frac{3-x-y}{3}} 1 \, dz \right) dy \right) dx =$$

$$W = \left\{ -\|\text{———} \;\middle|\; 0 \le z \le 1 - \frac{x+y}{3},\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3-x \right\}$$

Celkem

$$I = \iint\limits_{M_{xy}} \left(\int_0^{\frac{3-x-y}{3}} 1\,dz \right) dx\,dy = \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} \left(\int_0^{\frac{3-x-y}{3}} 1\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} \left[z \right]_0^{\frac{3-x-y}{3}} dy \right) dx = \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{3}\,dy \right) dx =$$

$$W = \left\{ -\| - \;\middle|\; 0 \le z \le 1 - \frac{x+y}{3},\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3-x \right\}$$

Celkem

$$I = \iint_{M_{xy}} \left(\int_0^{\frac{3-x-y}{3}} 1\,dz \right) dx\,dy = \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} \left(\int_0^{\frac{3-x-y}{3}} 1\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} \left[z \right]_0^{\frac{3-x-y}{3}} dy \right) dx = \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{3}\, dy \right) dx = \text{substituce } (3-x)=t \; \vdots$$

$$= \int_0^3 \left[y\left(1-\frac{x}{3}\right) - \frac{y^2}{6} \right]_0^{3-x} dx = \int_0^3 \frac{1}{3}(3-x)^2 - \frac{1}{6}(3-x)^2\, dx \stackrel{\vdots}{=} \frac{1}{6}\left[\frac{(3-x)^3}{-3} \right]_0^3 = -\frac{1}{18}(0-27)$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2}}}\,!!$$

Fyzikální významy (použití) trojného integrálu

Objem

$$f \equiv 1 \quad \longrightarrow \quad V = \iiint_M 1\,dx\,dy\,dz$$

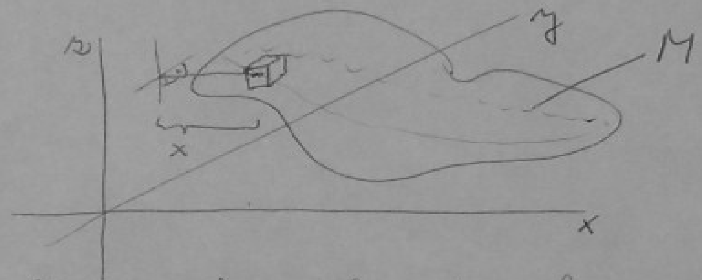
Těžiště

$$T = [x_T, y_T, z_T] \qquad m = \iiint_M \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \leftarrow \text{hmotnost}$$

$$x_T = \frac{m_{yz}}{m} \qquad y_T = \frac{m_{xz}}{m} \qquad z_T = \frac{m_{xy}}{m}$$

Statický moment vzhledem k rovině yz

$$\underbrace{m_{yz} = \iiint x \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}_{\rho \,=\, \text{hustota } [kg/m^3]}$$



Tj. součet všech příspěvků $\underbrace{\rho \cdot dx\,dy\,dz}_{\text{hmotnost}} \cdot \underbrace{x}_{\text{vzdálenost od } y\text{-}z}$

atd. m_{xz}, m_{xy}.

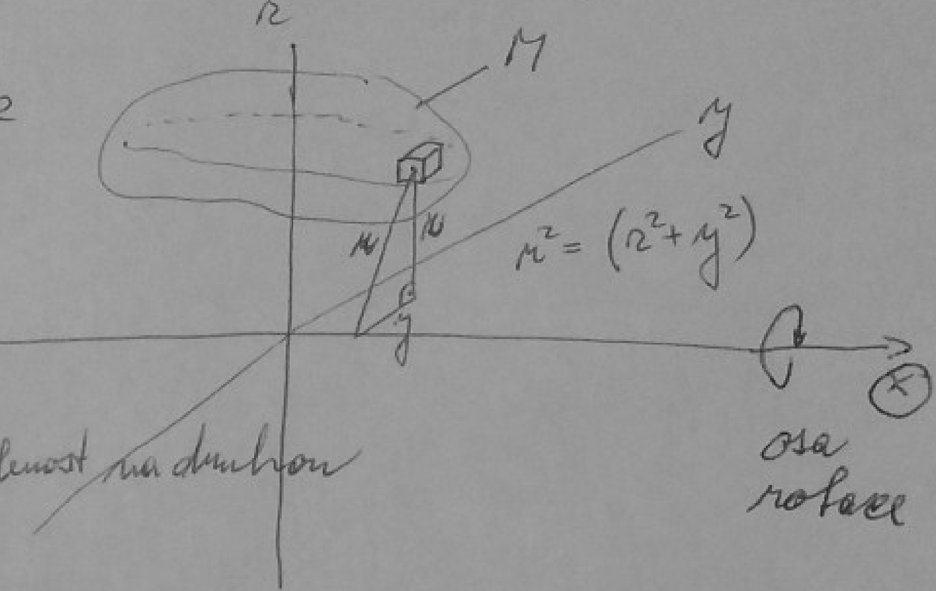
Moment setrvačnosti

– ~~námaha~~ velikost odporu, který klade těleso M při snaze ho roztočit kolem zvolené osy rotace

Moment setrvačnosti vzhledem k ose x

$$J_x = \iiint_M (y^2+z^2)\cdot\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$[kg\cdot m^2]$$



Je to součet příspěvků $\underbrace{\rho\cdot dx\,dy\,dz}_{dm}\cdot\underbrace{r^2}_{\text{vzdálenost na druhou}}$

Podobně J_y, J_z

Ale můžeme definovat i moment setrv. vzhledem k

rovině $xy \longrightarrow J_{xy} = \iiint_M z^2 \cdot \rho \, dx\,dy\,dz$

xz —||—

yz

nebo

počátku $\longrightarrow J_0 = \iiint_M (x^2+y^2+z^2) \rho \, dx\,dy\,dz$

Klasický úkol

– máme těleso a jeho hustotu

↳ chceme spočítat m, těžiště, momenty...

Úkol v Mat 2

– spočítáme integrál → co může mít výsledné číslo za význam?

tj. abych spočítal m, těžiště, momenty...

hledám f-ci $\rho(x,y,z)$ jako část integrandu

Př.: $\iiint_W xy\,dx\,dy\,dz,$

→ Hmotnost, pokud ρ = xy

→ Statický moment k rovině xz, pokud ρ = x

→ Statický moment k rovině yz, pokud ρ = y

→ (Statický moment k rovině xy, pokud ρ = xy/z)

→ (Moment setrvačnosti k ose x, pokud ρ = xy/(y^2 + z^2))

Atd.

Některé fyzikální a mechanické aplikace trojného integrálu

Mějme těleso ve tvaru měřitelné množiny M. Hustota tělesa budiž dána jako $\rho(x, y, z)$ a udávaná v $kg \cdot m^{-3}$. Pak

hmotnost tělesa .... $m = \iiint_M \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ [kg],

statický moment

vzhledem k rovině xy $m_{xy} = \iiint_M z \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ [kg · m],

vzhledem k rovině xz $m_{xz} = \iiint_M y \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ [kg · m],

vzhledem k rovině yz $m_{yz} = \iiint_M x \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ [kg · m],

souřadnice těžiště .. $x_T = \dfrac{m_{yz}}{m}$, $y_T = \dfrac{m_{xz}}{m}$ $z_T = \dfrac{m_{xy}}{m}$,

moment setrvačnosti

vzhledem k rovině xy $\quad J_{xy} = \iiint_M z^2 \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2]$,

vzhledem k rovině xz $\quad J_{xz} = \iiint_M y^2 \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2]$,

vzhledem k rovině yz $\quad J_{yz} = \iiint_M x^2 \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2]$,

vzhledem k ose x ... $\quad J_x = \iiint_M (y^2 + z^2) \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2]$,

vzhledem k ose y .... $\quad J_y = \iiint_M (x^2 + z^2) \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2]$,

vzhledem k ose z .... $\quad J_z = \iiint_M (x^2 + y^2) \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2]$,

vzhledem k počátku . $\quad J_0 = \iiint_M (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2]$.