Matematika II – přednáška 13

Co bude dneska?

Některé vlastnosti trojného integrálu.

Transformace integrálu do cylindrických souřadnic.

Transformace integrálu do sférických souřadnic.

Nějaké příklady

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{\ }neustupa/M2\_Neu\_prednaska13.pdf$
(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

Věta (Postačující podmínka pro existenci trojného integrálu.). *Nechť* M *je měřitelná množina v* $\mathbb{E}_3$ *a* f *je omezená a spojitá funkce na* M*. Pak trojný integrál* $\iiint_M f \, dx \, dy \, dz$ *existuje.*

Věta (Fubiniho věta pro trojný integrál.). *Nechť* M *je elementární obor integrace vzhledem k rovině* xy*. Nechť* $f(x,y,z)$ *je spojitá funkce na* M*. Pak*

$$\iiint_M f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{M_{xy}} \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z) \, dz \right) dx \, dy.$$

Některé vlastnosti trojného integrálu

a) **Linearita trojného integrálu.** *Jsou-li funkce f a g integrovatelné na množině $M \subset \mathbb{E}_3$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak*

$$\iiint_M (f+g)\,dx\,dy\,dz = \iiint_M f\,dx\,dy\,dz + \iiint_M g\,dx\,dy\,dz,$$

$$\iiint_M \alpha \cdot f\,dx\,dy\,dz = \alpha \cdot \iiint_M f\,dx\,dy\,dz.$$

Některé vlastnosti trojného integrálu

a) **Linearita trojného integrálu.** *Jsou-li funkce f a g integrovatelné na množině $M \subset \mathbb{E}_3$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak*

$$\iiint_M (f+g)\, dx\, dy\, dz = \iiint_M f\, dx\, dy\, dz + \iiint_M g\, dx\, dy\, dz,$$

$$\iiint_M \alpha \cdot f\, dx\, dy\, dz = \alpha \cdot \iiint_M f\, dx\, dy\, dz.$$

b) **Aditivita trojného integrálu vzhledem k oboru integrace.** *Nechť jsou M_1 a M_2 měřitelné množiny v $\mathbb{E}_3$, takové, že $\mu_3(M_1 \cap M_2) = 0$, a f je integrovatelnou funkcí na M_1 i na M_2, pak*

$$\iiint_{M_1} f\, dx\, dy\, dz + \iiint_{M_2} f\, dx\, dy\, dz = \iiint_{M_1 \cup M_2} f\, dx\, dy\, dz.$$

Některé vlastnosti trojného integrálu

c) Nechť f je integrovatelná funkce na množině $M \in \mathbb{E}_3$ a omezená funkce g se liší od f nejvýše na množině míry nula v M, pak g je také integrovatelná funkce v M a

$$\iiint_M g \, dx \, dy \, dz = \iiint_M f \, dx \, dy \, dz.$$

Některé vlastnosti trojného integrálu

c) Nechť f je integrovatelná funkce na množině $M \in \mathbb{E}_3$ a omezená funkce g se liší od f nejvýše na množině míry nula v M, pak g je také integrovatelná funkce v M a

$$\iiint_M g \, dx \, dy \, dz = \iiint_M f \, dx \, dy \, dz.$$

d) Je-li f omezená funkce na množině $M \in \mathbb{E}_3$ míry nula, pak f je integrovatelná na M a

$$\iiint_M f \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Některé vlastnosti trojného integrálu

e) Jsou-li f a g integrovatelné funkce na množině $M \subset \mathbb{E}_3$ takové, že $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)\ \ \forall\, [x,y,z] \in M$, pak

$$\iiint_M f\ dx\, dy\, dz\ \geq\ \iiint_M g\ dx\, dy\, dz.$$

Speciálně, je-li $f(x,y,z) \geq 0\ \ \forall\, [x,y,z] \in M$, pak

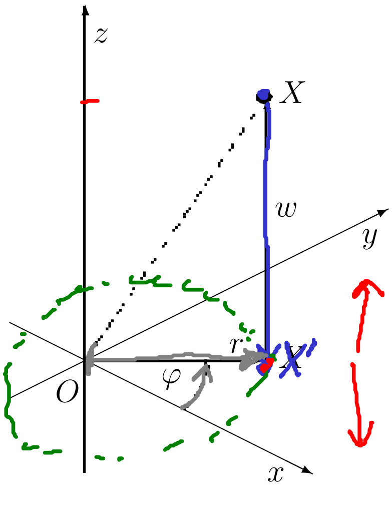
$$\iiint_M f\ dx\, dy\, dz\ \geq\ 0.$$

Cylindrické souř. (Válcové)

$X = [x, y, z]$

$[r, \varphi, w]$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = w \\ J = r \end{cases}$$



Obr.ze skript

$r \geq 0$

$\varphi \in I$, který má max. velikost 2π

$w \in \mathbb{R}$

Cylindrické souřadnice bodu $X = [x, y, z] \in \mathbb{E}_3$ jsou r, φ, w.

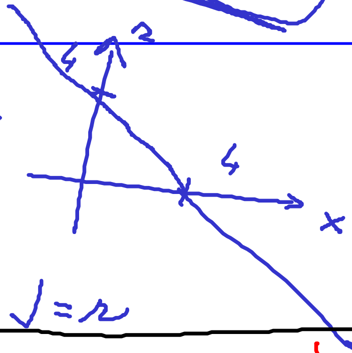
Geometrický význam: r, φ jsou polárními souřadnicemi bodu $[x, y]$ v rovině xy a $w = z$. (obrázek na dalším slidu).

Mezi kartézskými souřadnicemi a cylindrickými souřadnicemi bodu X platí relace:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = w.$$

Jaký je Jakobián? (na tabuli).

$r = 4 - x$



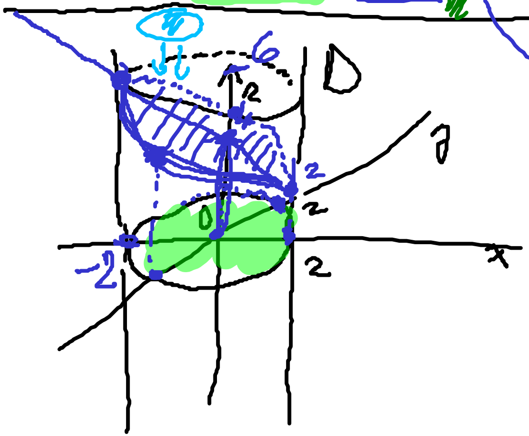
Cylindrické souřadnice

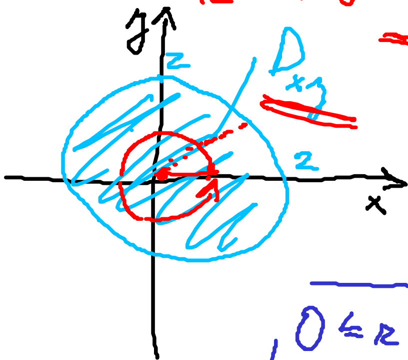
Motivační příklad na tabuli

Př.: D: $x^2+y^2<4$ ✓, $0 \le z \le 4-x$

1) $D_{xy} = ?$

2) $V = ?$





- $x = r\cos\varphi$
- $y = r\sin\varphi$

$z = w$

- $r \in \langle 0, 2)$
- $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$

$0 \le w \le 4 - x = 4 - r\cos\varphi$

$x^2+y^2<4$

$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 < 4$

$r < 2$

$0 \le z = w \le 4 - x$ ✓

$r = 2 \Rightarrow w \le 4 - 2\cos\varphi$

$$V = \iiint_D 1 \, dx\,dy\,dz \xrightarrow{\text{Fubini}} \iint_{D_{xy}} \left(\int_0^{4-x} 1 \, dz \right) dx\,dy$$

Cylindrické súradnice:

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{4 - r\cos\varphi} 1 \cdot r \, dw \right) d\varphi \right) dr = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left[r \cdot w \right]_0^{4 - r\cos\varphi} d\varphi \right) dr$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \underbrace{r\left(4 - r\cos\varphi\right)}_{4r - r^2\cos\varphi} d\varphi \right) dr = \int_0^2 \left(\left[4r\varphi - r^2 \sin\varphi \right]_0^{2\pi} \right) dr =$$

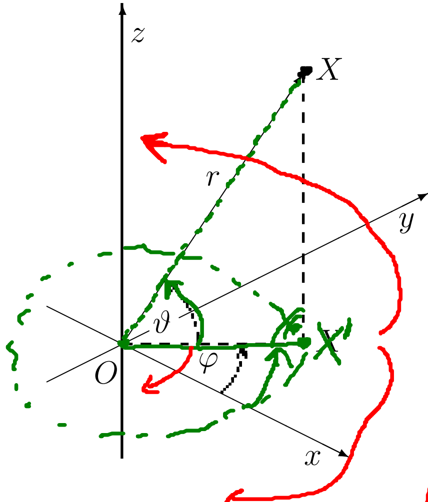
$$= \int_0^2 \left(4r \cdot 2\pi - \cancel{r^2 \cdot 0}\right) - \cancel{\left(4r \cdot 0 - r^2 \cdot 0\right)} \, dr = 8\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 = 8\pi \cdot 2 = \boxed{16\pi}$$

Sférické souřadnice

"Kulové" $[r, \varphi, \vartheta]$

II.7.8. Sférické souřadnice v $\mathbb{E}_3$. Sférické souřadnice bodu $X = [x, y, z]$ v $\mathbb{E}_3$ jsou r, φ a ϑ. Geometrický význam - viz. obrázek. Toto vede k následujícím rovnicím:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cos\vartheta \cos\varphi, \\ y &= r \cos\vartheta \sin\varphi, \\ z &= r \sin\vartheta. \end{aligned}}$$

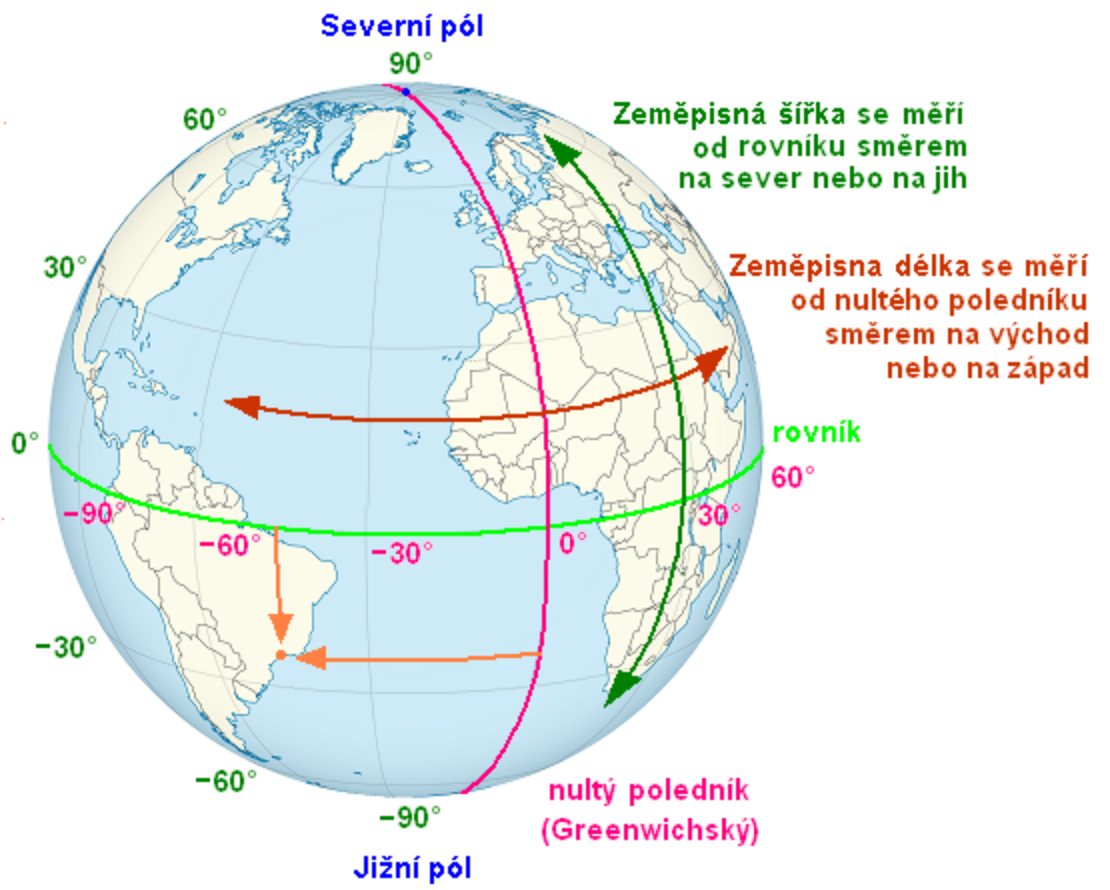


Obr. ze skript

$r \geq 0$

φ má int. s max délkou 2π

$\vartheta \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$

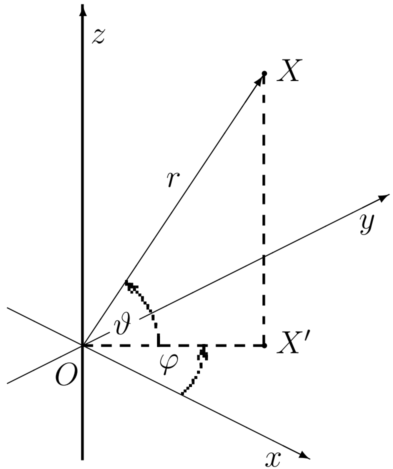

Severní pól
90°
60°
30°
0°
−30°
−60°
−90°
Jižní pól
Zeměpisná šířka se měří
od rovníku směrem
na sever nebo na jih
Zeměpisna délka se měří
od nultého poledníku
směrem na východ
nebo na západ
rovník
60°
30°
0°
−30°
−60°
−90°
nultý poledník
(Greenwichský)

Sférické souřadnice

II.7.8. Sférické souřadnice v $\mathbb{E}_3$. Sférické souřadnice bodu $X = [x, y, z]$ v $\mathbb{E}_3$ jsou r, φ a ϑ. Geometrický význam - viz. obrázek. Toto vede k následujícím rovnicím:

$$\begin{aligned} x &= r \cos\vartheta \cos\varphi, \\ y &= r \cos\vartheta \sin\varphi, \\ z &= r \sin\vartheta. \end{aligned}$$

$J = r^2 \cos\vartheta$



Obr. ze skript

Platí (dk. na tabuli) $\quad dx\,dy\,dz = r^2 \cos\vartheta \,dr\,d\varphi\,d\vartheta.$

$$r^2\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\vartheta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\vartheta \le R^2$$

$$r^2\cos^2\vartheta\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{1} + r^2\sin^2\vartheta \le R^2$$

$$r^2\underbrace{(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta)}_{1} = r^2 \le R^2 \Rightarrow r \le R$$

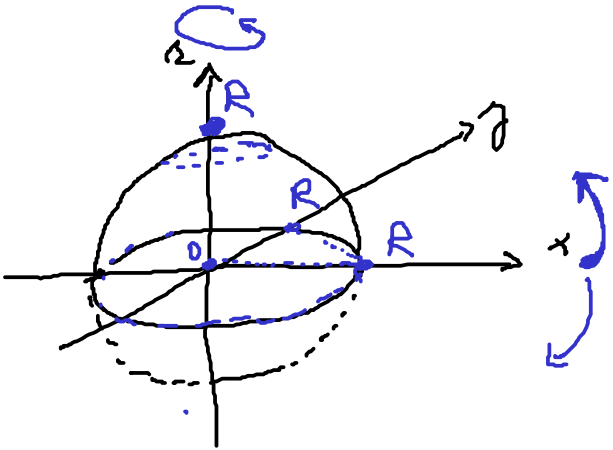
Příklady na tabuli.

Př.: $D: x^2+y^2+z^2 \le R^2$, R konst. $\Rightarrow$ polokoule

$z \ge 0$

b) $m = ?$ $\rho(x,y,z) = z = r\sin\vartheta$

$J = r^2\cos\vartheta$



a) $x = r\cos\vartheta\cos\varphi$

$y = r\cos\vartheta\sin\varphi$

$z = r\sin\vartheta$

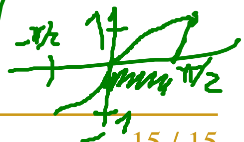
$r \in \langle 0, R\rangle$

$\varphi \in \langle 0, 2\pi)$

$\vartheta \in \langle 0, \pi/2\rangle$

$z = r\sin\vartheta \ge 0$

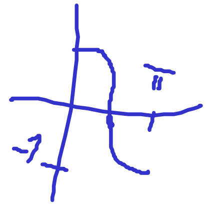
$\sin\vartheta \ge 0$



$$m(D) = \iiint_D \overset{R}{\overset{\shortparallel}{\rho(x,y,z)}}\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r\sin\vartheta \cdot r^2\cos\vartheta \, dr\, d\varphi\, d\vartheta =$$

$$= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} r^3 \sin\vartheta\cos\vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi \right) dr =$$



$$= \int_0^R r^3\, dr \cdot \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin\vartheta\cos\vartheta}_{\frac{1}{2}\sin 2\vartheta}\, d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \cdot \underbrace{[\varphi]_0^{2\pi}}_{2\pi} \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 2\vartheta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{R^4}{4}\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2\cdot 2}\left(\underbrace{-\cos\pi}_{-(-1)} + \underbrace{\cos 0}_{1}\right) =$$

$$= \frac{R^4}{4}\cdot \cancel{2}\pi \cdot \frac{1}{\cancel{4}}\cdot \cancel{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$