Matematika II – přednáška 14

Co bude dneska?

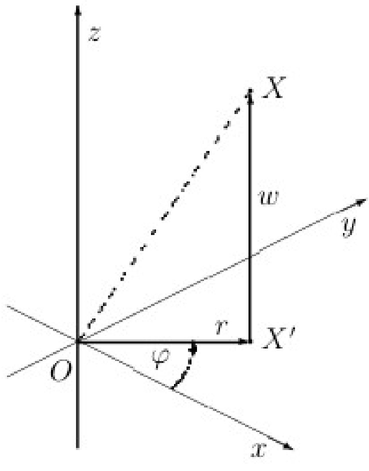
Výpočet mechanických charakteristik těles. Objem tělesa.

Transformace integrálu do zobecněných cylindrických souřadnic a zobecněných sférických souřadnic. Shrnutí 2D a 3D int.

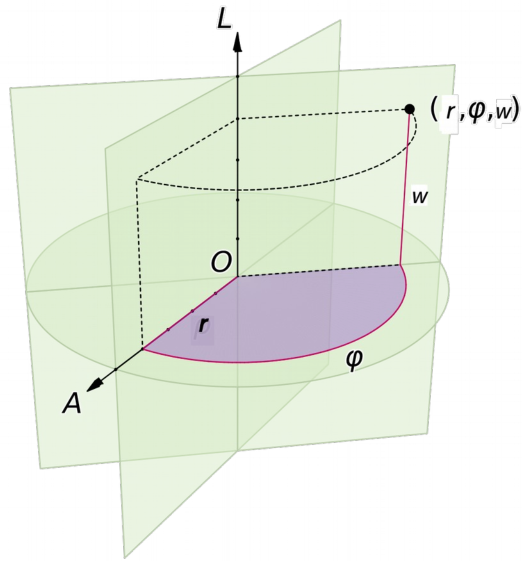
Diferenciání operátory. Divergence vektorového pole. Rotace vektorového pole.

Nějaké příklady

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska14.pdf$
(pro osobní potřeby).



Obr.ze skript



Cylindrické souřadnice

Cylindrické souřadnice bodu $X = [x, y, z] \in \mathbb{E}_3$ jsou r, φ, w.

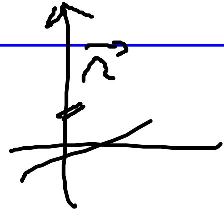
Geometrický význam: r, φ jsou polárními souřadnicemi bodu $[x, y]$ v rovině xy a $w = z$. (obrázek na dalším slidu).

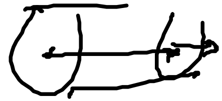
Mezi kartézskými souřadnicemi a cylindrickými souřadnicemi bodu X platí relace:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = w.$$

$$dx\, dy\, dz = r\, dr\, d\varphi\, dw.$$

Tedy $J = r$.





Zobecněné cylindrické souřadnice

$$x = x_0 + ar\, \cos\,\varphi, \quad y = y_0 + br\, \sin\,\varphi, \quad z = z_0 + cw,$$

$[x_0, y_0, z_0]$ je vybraný bod v $\mathbb{E}_3$ (počátek zobecněného cylindrického souřadného systému), a, b, c jsou kladné parametry.

$$dx\,dy\,dz \;=\; abc\,r\;dr\,d\varphi\,dw.$$

Příklad na tabuli.

Další možnosti zobecnění - úvaha na tabuli.

Jak spočítat Jakobián?

- obecně je:

$$x = \Phi_1(r, \varphi, w)$$
$$y = \Phi_2(r, \varphi, w)$$
$$z = \Phi_3(r, \varphi, w)$$

$$\Downarrow$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} & \cdots & \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Pro zobec. cylindr. souřadn.

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{array}\right.$$

$$x = \Phi_1(\ ) = x_0 + a r \cos\varphi$$
$$y = \Phi_2(\ ) = y_0 + b r \sin\varphi$$
$$z = \Phi_3(\ ) = z_0 + c \cdot w$$

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = w$$
$$\Downarrow$$
$$J = r$$

$$J = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a r \sin\varphi & 0 \\ b\sin\varphi & b r \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} =$$

$$= c \cdot (a \cos^2\varphi \cdot b \cdot r + a r \sin^2\varphi \cdot b)$$

$$= \boxed{c\, a\, b\, r}\ (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 1$$

Zobecněné cylindrické souřadnice

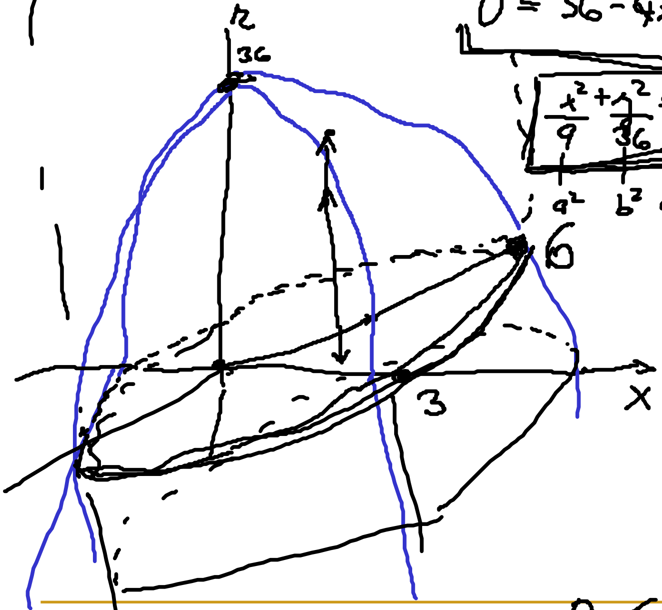
Příklad na tabuli.

$$D: \; 0 \le z \le 36 - 4x^2 - y^2 \; ; \quad V = ?$$

$$0 \le 36 - 4x^2 - y^2$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} \le 1 \qquad (a^2, \; b^2)$$

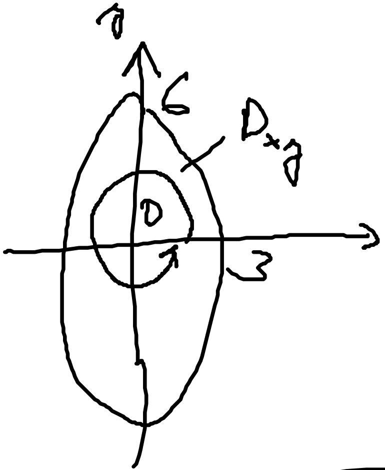
$$V = \iiint_D 1 \, dx\, dy\, dz$$



$$x = a\, r \cos\varphi = 3 r \cos\varphi$$
$$y = b\, r \sin\varphi = 6 r \sin\varphi$$
$$z = w$$
$$J = a b r = 18 r$$

$$r \in \langle 0, 1 \rangle$$
$$\varphi \in \langle 0, 2\pi)$$

$$0 \le w = z \le 36 - 4x^2 - y^2 = 36(1 - r^2)$$



$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}\le 1 \longrightarrow \boxed{r\le 1}$$

$$x \quad \frac{(\cancel{3}r\cos\varphi)^2}{\cancel{9}}+\frac{(\cancel{6}r\sin\varphi)^2}{\cancel{36}}\le 1$$

$$r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\le 1$$

$$w \le 36-4x^2-y^2 = 36-4\cdot\frac{36}{9}r^2\cos^2\varphi-\frac{36}{36}r^2\sin^2\varphi$$

$$=36\left(1-\underbrace{r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}_{=r^2}\right)=36(1-r^2)$$

$$V=\iiint_D 1\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{36(1-r^2)}1\cdot 18r\,dw\right)d\varphi\right)dr=$$

$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(18r\,[w]_0^{36(1-r^2)}\right)d\varphi\,dr=\int_0^1\int_0^{2\pi}18r\cdot 36\cdot(1-r^2)\,d\varphi\,dr=\otimes$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 18r \cdot 36(1-r^2)\, d\varphi \; dr =$$

$$= 18\cdot 36 \int_0^1 \Big(r(1-r^2) \underbrace{\int_0^{2\pi} 1\, d\varphi}_{\text{číslo}} \Big)\, dr = 18\cdot 36 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1\, d\varphi}_{2\pi} \cdot \int_0^1 r - r^3\, dr$$

$$= 18\cdot 18\cdot 2 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 2\cdot 9\cdot 2\cdot 9\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2}\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 4\cdot 81\cdot \pi = 324\pi$$

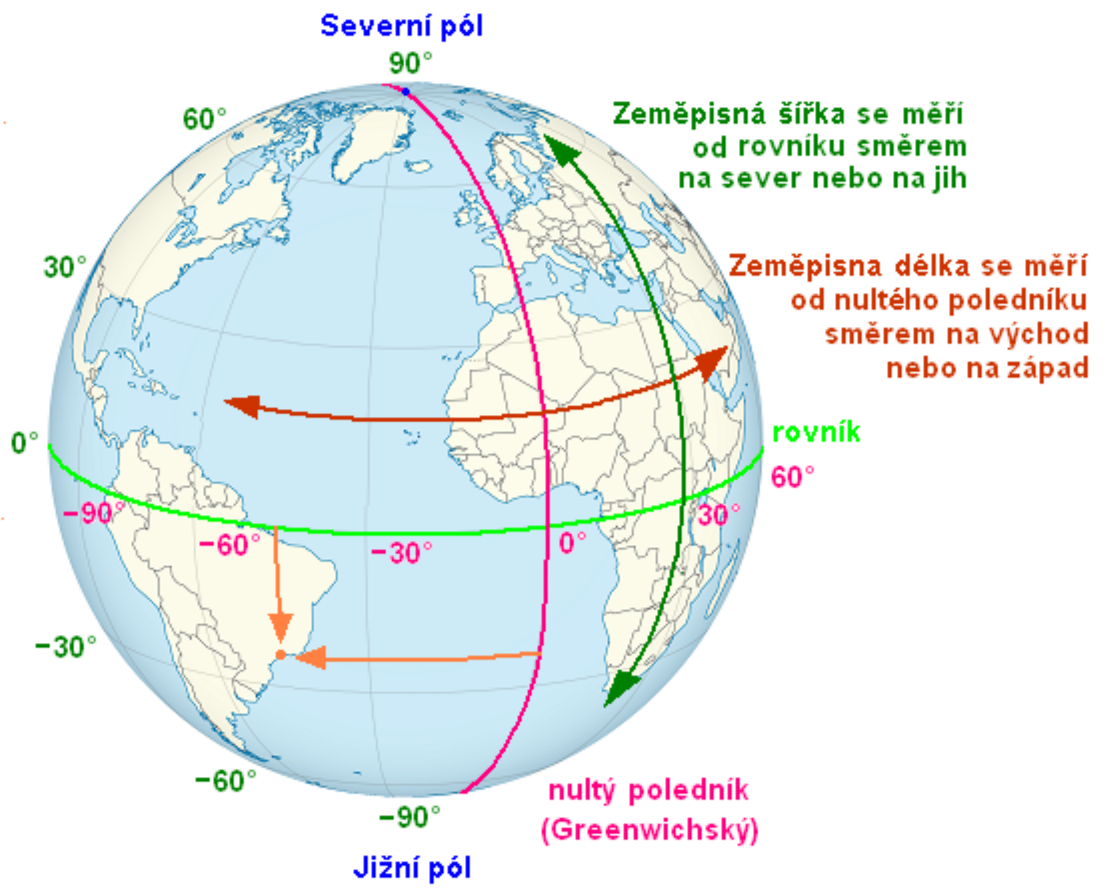
Zobecněné sférické souřadnice

$$x = x_0 + ar\,\cos\vartheta\,\cos\varphi, \quad y = y_0 + br\,\cos\vartheta\,\sin\varphi, \quad z = z_0 + cr\,\sin\vartheta,$$

$[x_0, y_0, z_0]$ je vybraný bod v $\mathbb{E}_3$ (počátek zobecněného sférického souřadného systému), a, b, c jsou kladné parametry.

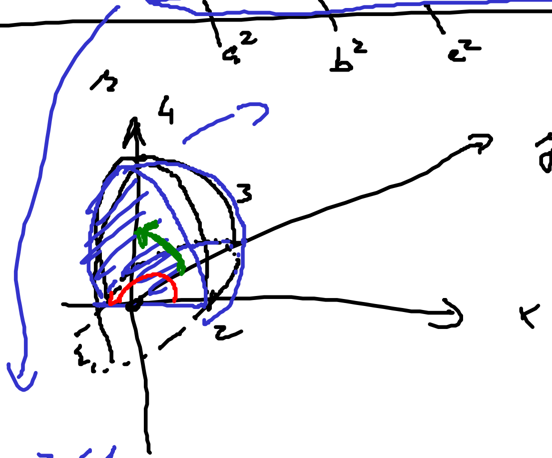
$$dx\,dy\,dz \;=\; abc\,r^2\,\cos\vartheta\;dr\,d\varphi\,d\vartheta.$$

Příklad na tabuli.


Severní pól
90°
60°
30°
0°
−30°
−60°
−90°
Jižní pól
Zeměpisná šířka se měří
od rovníku směrem
na sever nebo na jih
Zeměpisna délka se měří
od nultého poledníku
směrem na východ
nebo na západ
rovník
60°
30°
0°
−30°
−60°
−90°
nultý poledník
(Greenwichský)

$V = ?$ $\quad \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} \leq 1 \quad z \geq 0 \quad y \geq 0$

$a^2 \quad b^2 \quad c^2$



$x = 2r\cos\vartheta\cos\varphi$

$y = 3r\cos\vartheta\sin\varphi$

$z = 4r\sin\vartheta$

$J = \underbrace{abc}_{24}\, r^2 \cos\vartheta$

$$V = \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} 1 \cdot 24 r^2 \cos\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr$$

$r^2 \leq 1$

$r \leq 1$

$r \in \langle 0, 1 \rangle$

$\varphi \in \langle 0, \pi)$

$\vartheta \in \langle 0, \pi/2)$

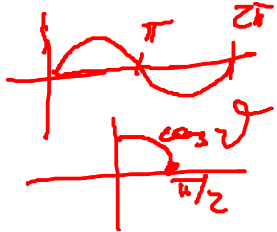
$z \geq 0$

$\| $

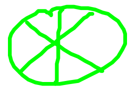
$4r\sin\vartheta \geq 0$

$y \geq 0$

$\cos\vartheta \cdot \sin\varphi \geq 0$



$\|$



$$V = \underbrace{\int_0^1 24 r^2 \, dr}_{24\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1} \cdot \underbrace{\int_0^\pi 1 \, d\varphi}_{\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \, d\vartheta}_{[\sin\vartheta]_0^{\pi/2}}$$

$$24\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \cdot \pi \cdot [\sin\vartheta]_0^{\pi/2} =$$

$$= 24 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1 = 8\pi$$

Některé fyzikální a mechanické aplikace trojného integrálu

Mějme těleso ve tvaru měřitelné množiny M. Hustota tělesa budiž dána jako $\rho(x, y, z)$ a udávaná v $kg \cdot m^{-3}$. Pak

hmotnost tělesa . . . . $m = \iiint_M \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ [kg],

statický moment

vzhledem k rovině xy $m_{xy} = \iiint_M z \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ $[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}]$,

vzhledem k rovině xz $m_{xz} = \iiint_M y \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ $[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}]$,

vzhledem k rovině yz $m_{yz} = \iiint_M x \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ $[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}]$,

souřadnice těžiště . . $x_T = \dfrac{m_{yz}}{m}$, $y_T = \dfrac{m_{xz}}{m}$ $z_T = \dfrac{m_{xy}}{m}$,

$M, \rho \to J_0 = ?$

$\hookrightarrow \iiint_M \rho \, dx\,dy\,dz$ ... kdyby: $\rho = x^2 y$

moment setrvačnosti

vzhledem k rovině xy $\quad J_{xy} = \iiint_M z^2 \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2],$

vzhledem k rovině xz $\quad J_{xz} = \iiint_M y^2 \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2],$

vzhledem k rovině yz $\quad J_{yz} = \iiint_M x^2 \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2],$

vzhledem k ose x ... $\quad J_x = \iiint_M (y^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2],$

vzhledem k ose y .... $\quad J_y = \iiint_M (x^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2],$

vzhledem k ose z .... $\quad J_z = \iiint_M (x^2+y^2) \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2],$

vzhledem k počátku . $\quad J_0 = \iiint_M (x^2+y^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2].$

$\rho = x^2 y$

1) $\rho = x^2 y \Rightarrow$

2) $x^2 \rho$; $\rho = y$ $\Rightarrow J_{yz}$

3) $y \cdot \rho$; $\rho = x^2$ $\hookrightarrow m_{xz}$

Shrnutí dvojného a trojného integrálu

Dvojný/Trojný integrál $\longrightarrow$ Elementární obor integrace, Fubiniho věta $\longrightarrow$
$\longrightarrow$ Dvojnásobný/Trojnásobný integrál.

Případně (podle příkladu) použití transformace souřadnic (2D Polární, 3D Cylindrické, Sférické).

Fyzikální charakteristiky.

Covid vtipy


NECHCI VÁM DO TOHO NOUZOVÉHO STAVU KECAT, ALE MY V BLANÍKU BYCHOM UŽ RÁDI VĚDĚLI, S ČÍM MÁME POČÍTAT.
DENÍK N


Všetci ma vidíte?


3:30 PDT
NEWSROOM
BREAKING NEWS AT 11
DEPRESSED PIGEON MISSES SHITTING ON PEOPLE.


WASH YOUR HANDS
WELL THIS IS GOING TO TAKE FOREVER...
© MATRON DESIGN

Operátor nabla

Definice (operátor nabla). *Symbolem* ∇ *označujeme vektorový operátor, nazývaný operátor nabla, jehož souřadnicemi jsou postupně parciální derivace podle* x, y *a* z*:*

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Operátor nabla se používá k označení různých vektorových i skalárních polí. Například gradient skalárního pole φ v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$ je vektorové pole:

$(\partial_x, \partial_y, \partial_z)\varphi$

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

gradient: skalár $\longrightarrow$ vektor

vstup výsledek

Divergence vektorového pole

$\vec{f}$

Definice (divergence vektorového pole). *Nechť* $\mathbf{f} = (U, V, W)$ *je vektorové pole v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$. *Divergencí* $\mathbf{f}$ *nazýváme skalární pole, které označujeme* $\operatorname{div} \mathbf{f}$ *a které definujeme rovnicí*

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$$

(ve všech bodech $[x, y, z] \in D$*, ve kterých má pravá strana smysl).*

Pomocí operátoru nabla můžeme divergenci zapsat: $\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f}$.

Příklady na tabuli.

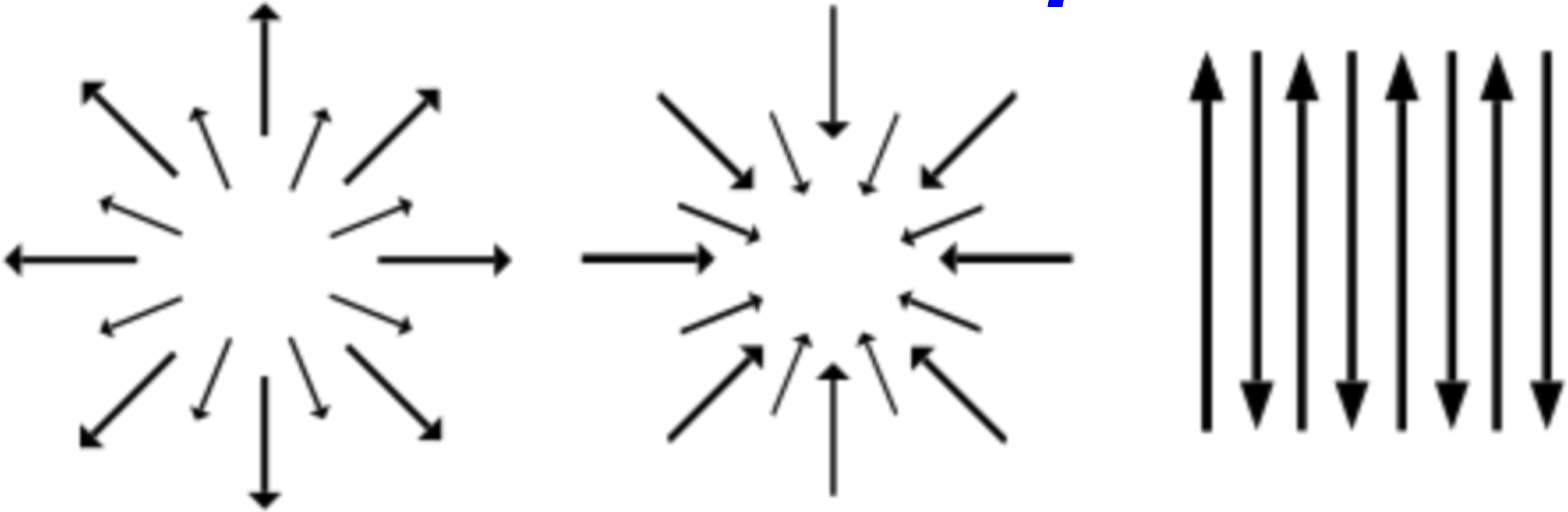
divergence: vektor → skalár

tj. číslo !

- fyzikální představa: zdroj/propad vektorového pole (je hadice s vytékající vodou nebo trubka odčerpává vodu?)

jak moc?

2D vektorové pole



$\partial/\partial x(\mathbf{V}_x) > 0$
$\partial/\partial y(\mathbf{V}_y) > 0$
$\nabla\cdot(\mathbf{V}) > 0$

s kladnou divergencí

$\partial/\partial x(\mathbf{V}_x) < 0$
$\partial/\partial y(\mathbf{V}_y) < 0$
$\nabla\cdot(\mathbf{V}) < 0$

se zápornou div

$\partial/\partial x(\mathbf{V}_x) = 0$
$\partial/\partial y(\mathbf{V}_y) = 0$
$\nabla\cdot(\mathbf{V}) = 0$

má div = 0

$$\vec{f} = (u, v, w) \qquad \begin{matrix} u(x,y,z) \\ v \\ w(-,,-) \end{matrix}$$

$$= (x, y, z)$$

Pr.:

$$\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} =$$

$$= 1 + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Pr. 2:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} z \\ y^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial y} + \frac{\partial x^3}{\partial z} = 0 + y + 0$$

$$= 2y$$

Rotace vektorového pole

rotace : vektor → vektor

vstup výsledek

Definice (rotace vektorového pole). *Nechť* $\mathbf{f} = (U, V, W)$ *je vektorové pole v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$. *Rotací* $\mathbf{f}$ *nazýváme vektorové pole, které označujeme* $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ *a které definujeme rovnicí*

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \; \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \; \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

(ve všech bodech $[x, y, z] \in D$*, ve kterých má pravá strana smysl).*

Pomocí operátoru nabla lze rotaci vyjádřit:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}}, & \vec{\mathbf{j}}, & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}, & \dfrac{\partial}{\partial y}, & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ U, & V, & W \end{vmatrix}.$$

-představa:
osa rotace daného
vekt. pole v daném bodě
osa je orientována
(pravidlo P ruky)
a (vektor) má velikost
= jak hodně rotuje

"Determinant" na pravé není determinantem přesně v tom smyslu, v jakém jej známe. Je to však užitečné schéma, pro výpočet rotace. Příklady na tabuli.

Pr.:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} = u \\ = v \\ = w \end{matrix} \qquad \operatorname{rot} \vec{f} = \, ? = \nabla \times \vec{f}$$

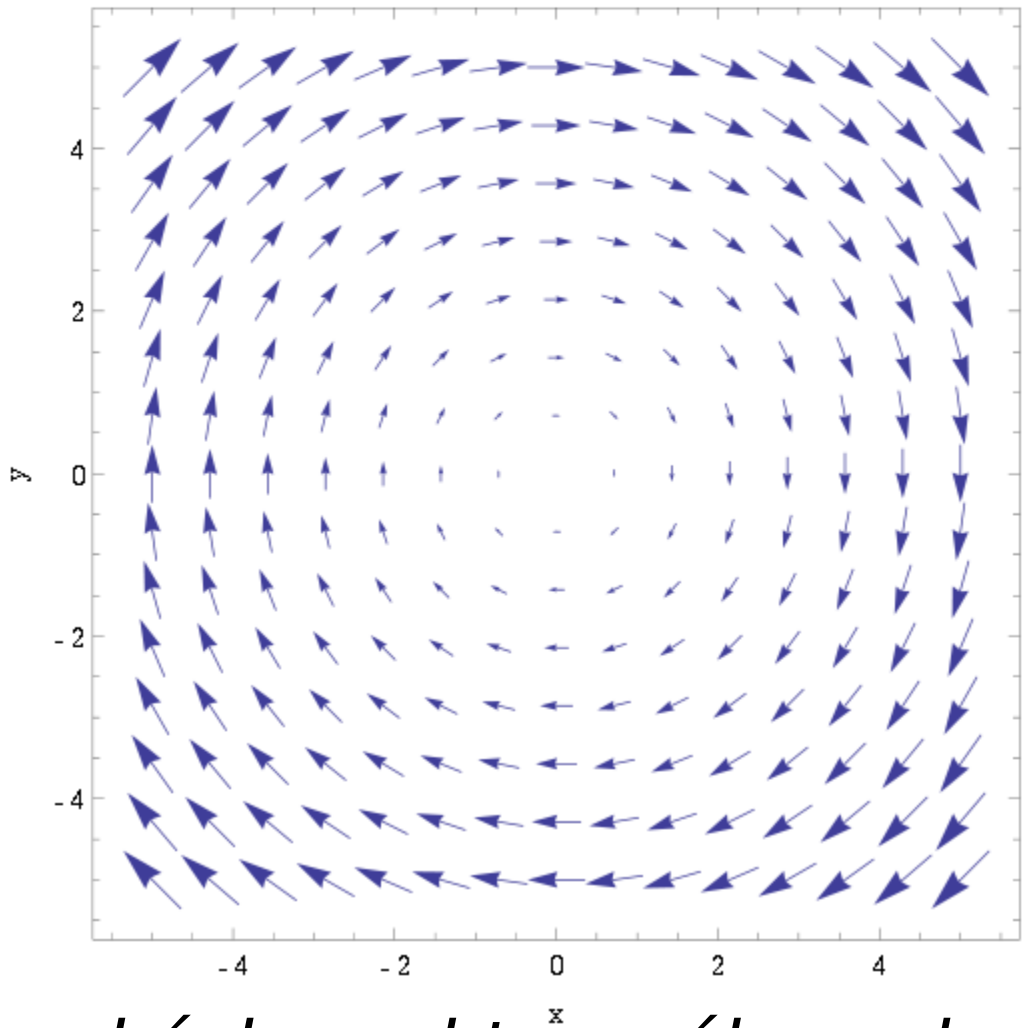
$$\operatorname{rot} \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\partial_y 0\right) + \vec{j}\left(\partial_z y\right) + \vec{k}\left(\partial_x (-x)\right)$$

$$- \vec{k}\left(\partial_y y\right) - \vec{i}\left(\partial_z (-x)\right) - \vec{j}\left(\partial_x 0\right)$$

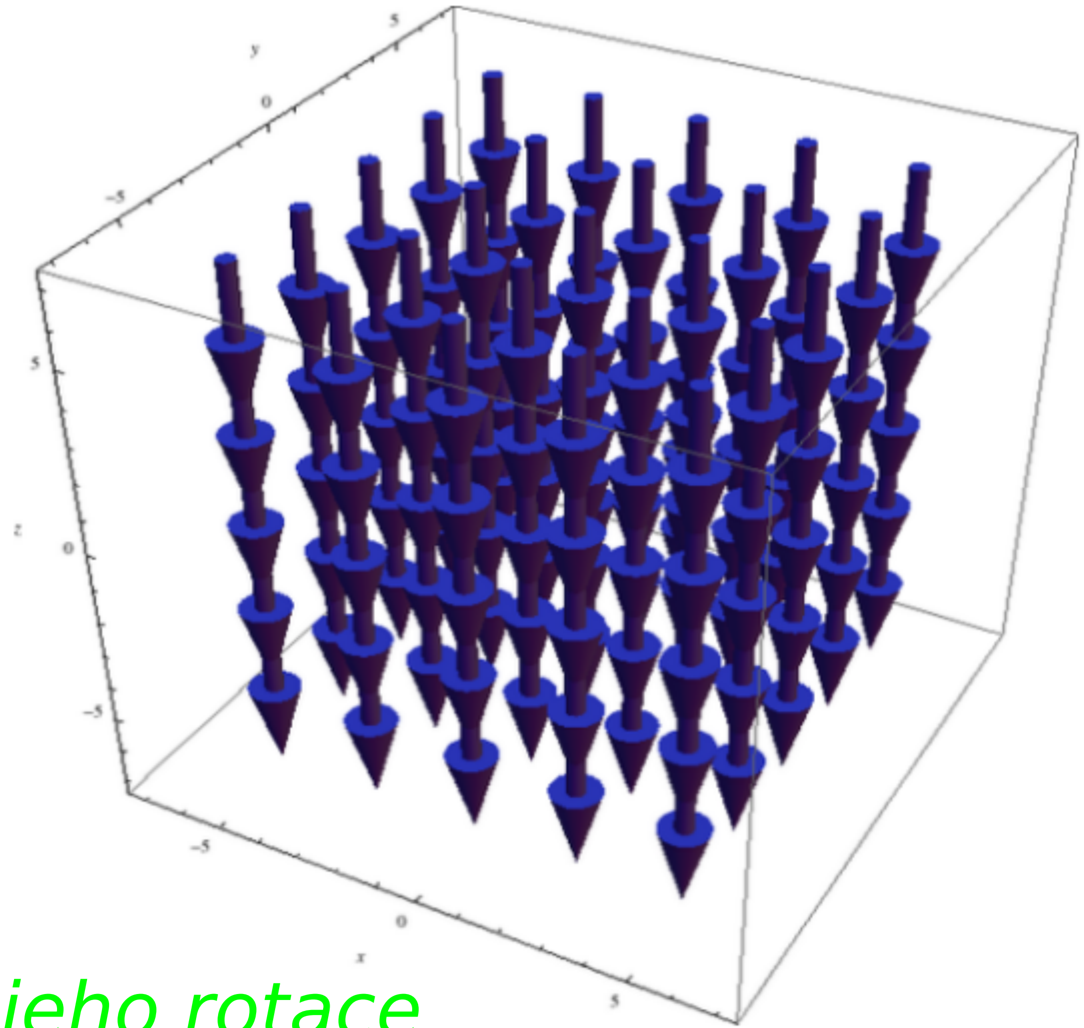
$$= 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + (-1) \cdot \vec{k}$$

$$- \vec{k} \cdot 1 - \vec{i} \cdot 0 - 0 \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot (0) + \vec{j}(0) + \vec{k} \cdot (-2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$



ukázka vektorového pole
v rovině xy



a jeho rotace
= výsledkem je konst. pole (0,0,-2)

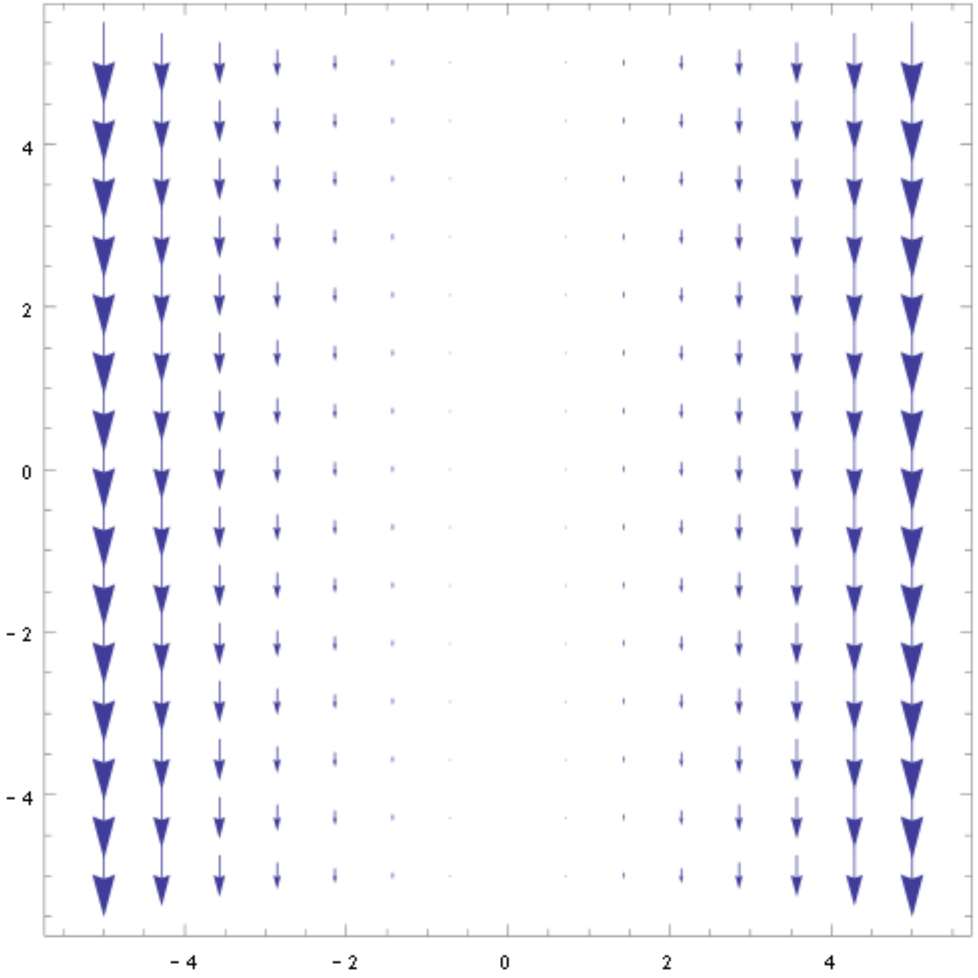
Př. 2:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rot} \vec{f} = ?$$

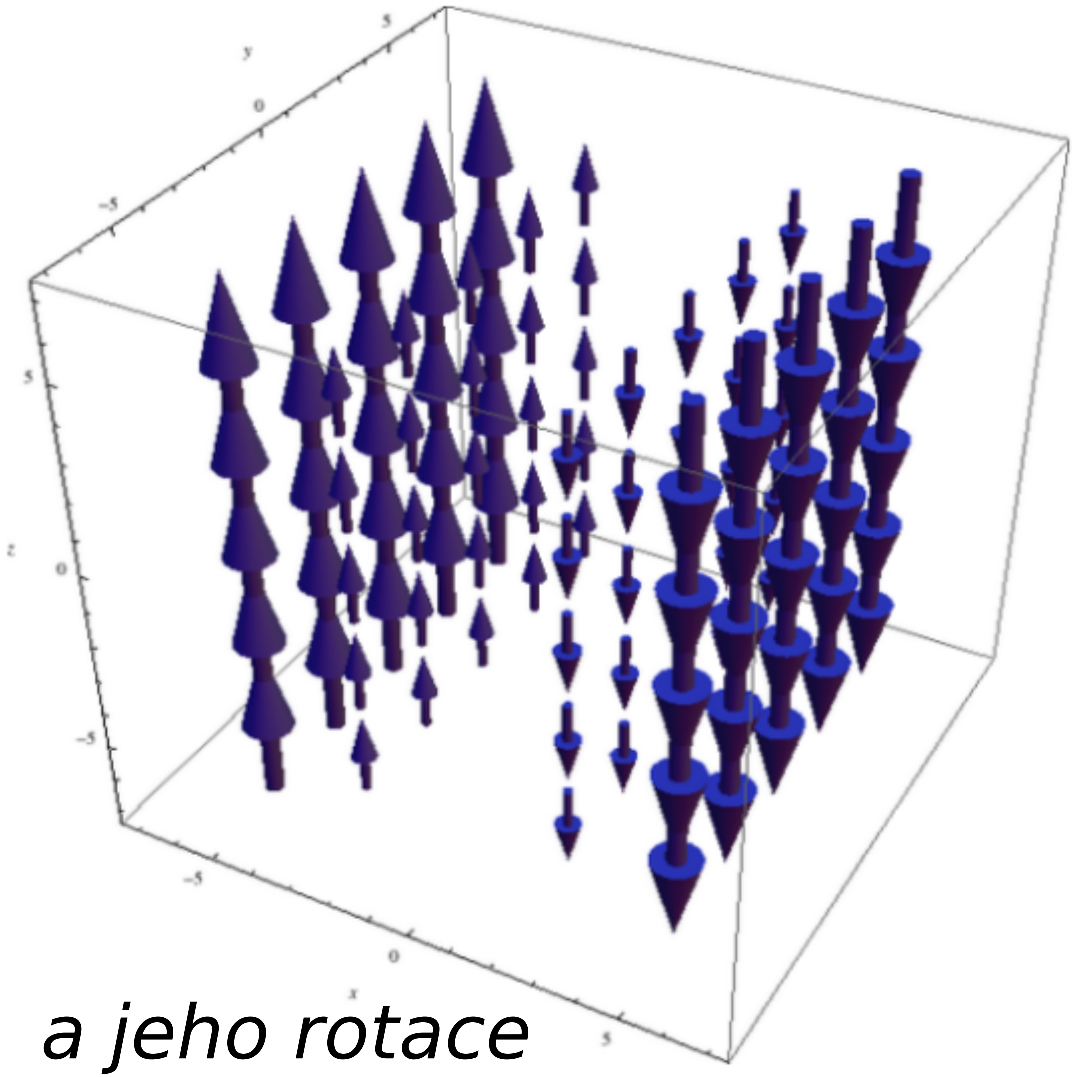
$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & -x^2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{rozvoj}} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_z \end{vmatrix} (-x^2) =$$

$$= -1 \left(\vec{i}\, \underbrace{\partial_z (-x^2)}_{0} - \vec{k}\, \underbrace{\partial_x (-x^2)}_{-2x} \right) =$$

$$= \vec{k} \cdot (-2x) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix}}$$



Ukázka vektorového pole
v rovině yz



a jeho rotace
= výsledkem je opět vekt. pole

Je-li φ skalární pole a $\mathbf{f}$ vektorové pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$ a mají-li obě pole v D druhé parciální derivace, pak

$$
\begin{aligned}
1) \quad \text{rot grad}\,\varphi &= \mathbf{0},\\
2) \quad \text{div rot}\,\mathbf{f} &= 0.
\end{aligned}
$$

- interpretaci si vysvětlíme později, zatím stačí, že z definice to tak vyjde

1) rotace potenciálního pole je nulová, vysvětlení viz Stokesova věta
(nevířivé pole má rotaci nulovou)

v konzervativním poli nelze vykonat práci pohybem po uzavřené křivce,
tj. vyjitím ze startu a návratem opět na start

2) divergence solenoidálního pole je nulová, viz Gaussova-Ostrogradského věta
(nezřídlové pole nemá zdroj)

tj. magnet nemá zdroj, ale dá se představit jako složený ze dvou částí: + a -