Matematika II – přednáška 15

Co bude dneska?

Budeme směřovat ke křivkovému integrálu, tedy:

Jednoduchá hladká křivka v $\mathbb{E}_2$ a $\mathbb{E}_3$. Parametrizace křivky.

Orientovaná křivka. Jednoduchá po částech hladká křivka.

Křivka zadaná paramtrizací. křivka zadaná průnikem dvou ploch.

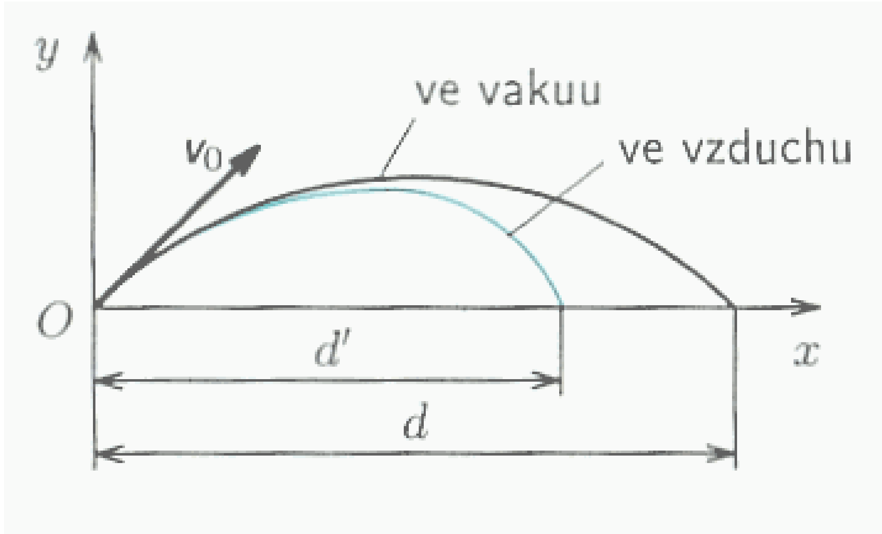
Nějaké příklady

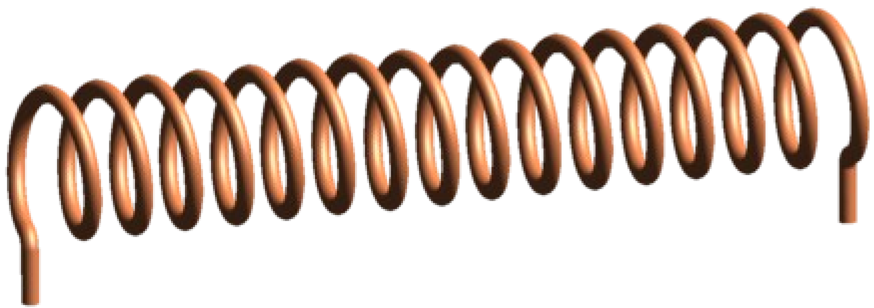
Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska15.pdf$
(pro osobní potřeby).

Jednoduchá hladká křivka v $\mathbb{E}_2$ a $\mathbb{E}_3$

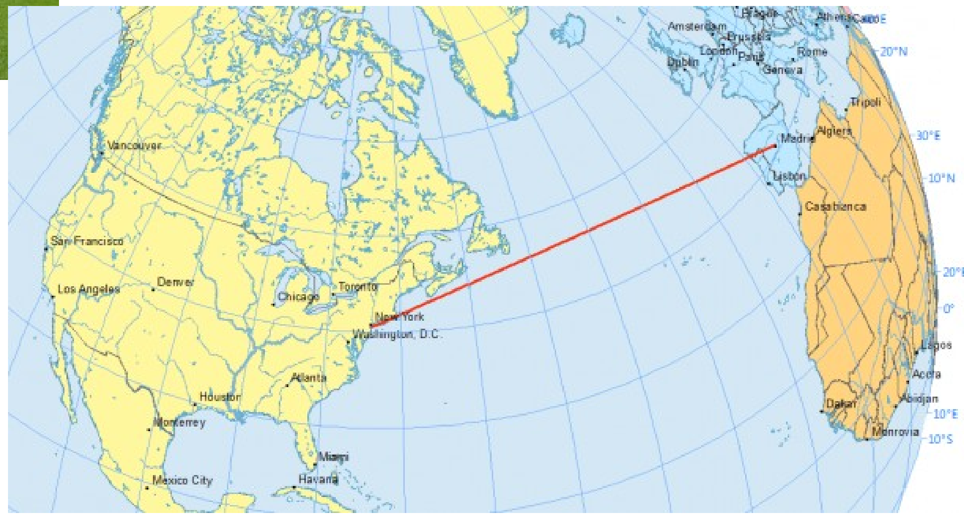
Motivace.

Křivkový integrál – motivace





Křivkový integrál – motivace



Jednoduchá hladká křivka v $\mathbb{E}_2$ a $\mathbb{E}_3$

Motivace:

Bod A se pohybuje v $\mathbb{E}_2$ nebo v $\mathbb{E}_3$ v časovém intervalu $\langle a, b\rangle$ a jeho poloha v okamžiku t je $P(t)$.

Jednoduchá hladká křivka v $\mathbb{E}_2$ a $\mathbb{E}_3$

Motivace:

Bod A se pohybuje v $\mathbb{E}_2$ nebo v $\mathbb{E}_3$ v časovém intervalu $\langle a, b\rangle$ a jeho poloha v okamžiku t je $P(t)$.

Nechť

a) bod A se v žádných dvou různých okamžicích t_1, $t_2 \in \langle a, b\rangle$, $t_1 < t_2$ (s možnou výjimkou případu, kdy $t_1 = a$ a $t_2 = b$) nenachází na stejném místě a

b) rychlost $\dot{P}(t)$ pohybu je omezená, mění se spojitě a je různá od nuly s možnou výjimkou případů, kdy $t = a$ nebo $t = b$.

Dráhu (trajektorii) kterou bod kterou bod proběhne budeme nazývat jednoduchou hladkou křivkou a funkci $P(t)$ parametrizací křivky.

Jednoduchá hladká křivka - definice

Budeme uvažovat, že P je zobrazení intervalu $\langle a, b\rangle$ do $\mathbb{E}_2$ nebo do $\mathbb{E}_3$. Potom jednoduchá hladká křivka je obor hodnot tohoto zobrazení.

Jednoduchá hladká křivka - definice

Budeme uvažovat, že P je zobrazení intervalu $\langle a, b\rangle$ do $\mathbb{E}_2$ nebo do $\mathbb{E}_3$. Potom jednoduchá hladká křivka je obor hodnot tohoto zobrazení.

Pro pevné t z $\langle a, b\rangle$ je $P(t)$ bod na ploše či v prostoru ($\mathbb{E}_k$). Tj. $P(t)$ má dvě či tři souřadnice:

Jednoduchá hladká křivka - definice

Budeme uvažovat, že P je zobrazení intervalu $\langle a, b\rangle$ do $\mathbb{E}_2$ nebo do $\mathbb{E}_3$. Potom jednoduchá hladká křivka je obor hodnot tohoto zobrazení.

Pro pevné t z $\langle a, b\rangle$ je $P(t)$ bod na ploše či v prostoru ($\mathbb{E}_k$). Tj. $P(t)$ má dvě či tři souřadnice.

Tj., je-li $\phi(t)$, $\psi(t)$ ($k = 2$) nebo $\phi(t)$, $\psi(t)$, $\vartheta(t)$ ($k = 3$), můžeme psát:

$$
\begin{aligned}
P(t) &= \big[\phi(t), \psi(t)\big] && \text{je-li } k = 2, \\
P(t) &= \big[\phi(t), \psi(t), \vartheta(t)\big] && \text{je-li } k = 3.
\end{aligned}
$$

Jednoduchá hladká křivka - definice

$$P(t) = [\phi(t), \psi(t)] \qquad \text{je-li } k = 2,$$
$$P(t) = [\phi(t), \psi(t), \vartheta(t)] \qquad \text{je-li } k = 3.$$

ϕ a ψ (respektive ϕ, ψ a ϑ) jsou funkcemi jedné proměnné t, definovanými v intervalu $\langle a, b\rangle$. Nazýváme je *souřadnicové funkce* zobrazení P. Proměnnou t nazýváme *parametr*.

Jednoduchá hladká křivka - definice

$$\begin{aligned} P(t) &= \big[\phi(t), \psi(t)\big] && \text{je-li } k = 2, \\ P(t) &= \big[\phi(t), \psi(t), \vartheta(t)\big] && \text{je-li } k = 3. \end{aligned}$$

ϕ a ψ (respektive ϕ, ψ a ϑ) jsou funkcemi jedné proměnné t, definovanými v intervalu $\langle a, b \rangle$. Nazýváme je *souřadnicové funkce* zobrazení P. Proměnnou t nazýváme *parametr*.

Derivaci funkce P podle t značíme tečkou a považujeme ji za vektorovou funkci. (Např. ve fyzice je derivací polohy podle času rychlost a rychlost je vektor.)

Souřadnice $\dot{P}(t)$ zapisujeme v kulatých závorkách. Rovněž můžeme použít vektory **i**, **j** a **k** (jednotkové vektory, orientované souhlasně s osami x, y a z a psát:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \big(\dot{\phi}(t), \dot{\psi}(t)\big) = \dot{\phi}(t)\,\mathbf{i} + \dot{\psi}(t)\,\mathbf{j} && \text{je-li } k = 2, \\ \dot{P}(t) &= \big(\dot{\phi}(t), \dot{\psi}(t), \dot{\vartheta}(t)\big) = \dot{\phi}(t)\,\mathbf{i} + \dot{\psi}(t)\,\mathbf{j} + \dot{\vartheta}(t)\,\mathbf{k} && \text{je-li } k = 3. \end{aligned}$$

Jednoduchá hladká křivka - definice

$$\begin{aligned} P(t) &= \big[\phi(t), \psi(t)\big] \qquad \text{je-li } k = 2, \\ P(t) &= \big[\phi(t), \psi(t), \vartheta(t)\big] \qquad \text{je-li } k = 3. \end{aligned}$$

Zobrazení P považujeme za spojité, jestliže všechny jeho souřadnicové funkce jsou spojité.

Podobně, o zobrazení P říkáme, že má spojitou derivaci, mají-li všechny souřadnicové funkce spojitou derivaci.

Poznámka: Nehrozí-li nedorozumění a záměna se značením souřadných os, můžeme místo $\phi(t)$, $\psi(t)$, $\vartheta(t)$ souřadnicové funkce zobrazení P značit i $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Jednoduchá hladká křivka - definice

Definice (parametrizace). Nechť P je spojité zobrazení intervalu $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{E}_k$ (kde $k = 2$ nebo $k = 3$). Předpokládejme, že

a) zobrazení P je v intervalu $\langle a, b \rangle$ prosté, s možnou výjimkou případu, kdy $P(a) = P(b)$ a

b) P má omezenou, spojitou a nenulovou derivaci $\dot{P}$ v otevřeném intervalu (a, b).

Množinu všech bodů $P(t)$ pro $t \in \langle a, b \rangle$ (tj. obor hodnot zobrazení P) pak nazýváme *jednoduchá hladká křivka* v $\mathbb{E}_k$. Zobrazení P nazýváme *parametrizace*.

Jednoduchá hladká křivka - definice

Definice (jednoduchá hladká křivka). Nechť P je spojité zobrazení intervalu $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{E}_k$ (kde $k = 2$ nebo $k = 3$). Předpokládejme, že

a) zobrazení P je v intervalu $\langle a, b\rangle$ prosté, s možnou výjimkou případu, kdy $P(a) = P(b)$ a

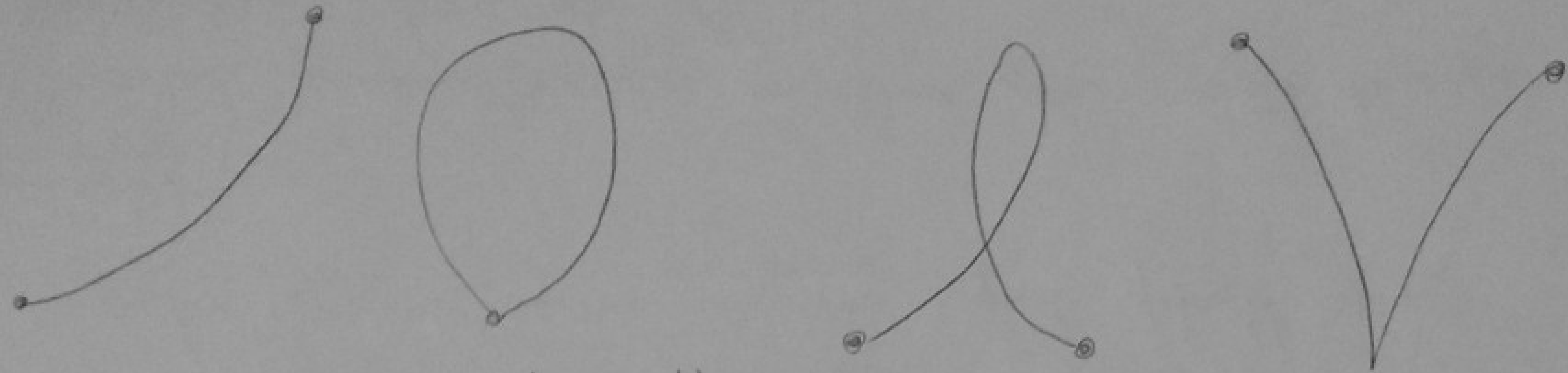
b) P má omezenou, spojitou a nenulovou derivaci $\dot{P}$ v otevřeném intervalu (a, b).

Množinu všech bodů $P(t)$ pro $t \in \langle a, b\rangle$ (tj. obor hodnot zobrazení P) pak nazýváme *jednoduchá hladká křivka* v $\mathbb{E}_k$. Zobrazení P nazýváme *parametrizace*.

Je-li $P(a) = P(b)$ pak nazýváme JHK uzavřenou.

JHK většinou označujeme velkými písmeny, například C, K, C_1. Obrázky na tabuli.

Příklady křivek (jednoduchých hladkých)



ANO

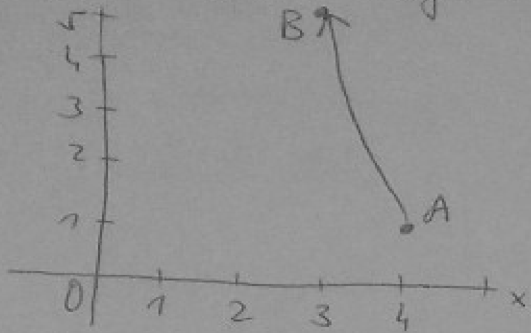
ANO (uzavřená)

NE (průsečík mimo počáteční/koncový bod)

NE (není hladká)

Př.:

Parametrizujte úsečku AB, kde poč. bod $A=[4, 1]$
a konc. bod $B=[3, 5]$.



Směrový vektor přímky AB je:

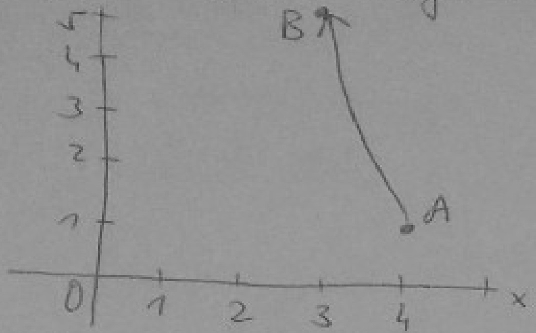
$$\vec{s} = \overline{B-A} = (-1, 4)$$

Rovnice přímky:

$$X = A + t\cdot\vec{s} \iff \boxed{\begin{aligned} x(t) &= 4 + (-1)\cdot t \\ y(t) &= 1 + 4\cdot t \end{aligned}}$$

Př.:

Parametrizujte úsečku AB, kde poč. bod $A=[4,1]$ a konc. bod $B=[3,5]$.



Směrový vektor přímky AB je:

$$\vec{s} = \overline{B-A} = (-1,4)$$

Rovnice přímky:

$$X = A + t\cdot\vec{s} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= 4+(-1)t \\ y(t) &= 1+4\cdot t \end{aligned}}$$

Ale odkud je t? (Bez toho param. nedává smysl)

bod A ∈ úsečky $\Rightarrow t=0$

bod B také $\Rightarrow t=1$

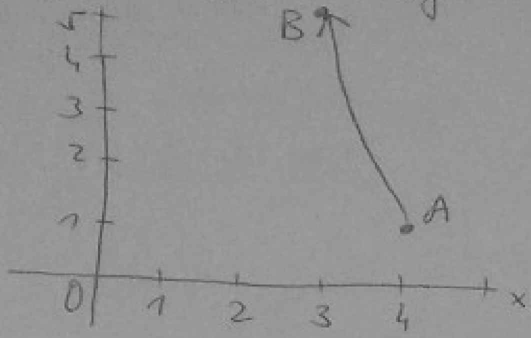
a všechny body mezi A a B

$\hookrightarrow t \in \langle 0,1 \rangle$

Celkem $P(t) = \begin{aligned} x(t) &= 4-t \\ y(t) &= 1+4t \end{aligned}, \ t\in\langle 0,1\rangle.$

Př.:

[redacted] Parametrizujte úsečku AB, kde poč. bod $A=[4,1]$ a konc. bod $B=[3,5]$.



Směrový vektor přímky AB je:

$$\vec{s} = \overline{B-A} = (-1,4)$$

Rovnice přímky:

$$X = A + t\cdot\vec{s} \iff \boxed{\begin{aligned} x(t) &= 4+(-1)t \\ y(t) &= 1+4\cdot t \end{aligned}}$$

Ale odkud je t? (Bez toho param. nedává smysl)

bod $A \in$ úsečky $\Rightarrow t=0$

bod B taky $\Rightarrow t=1$

a všechny body mezi A a B

$\hookrightarrow$ $t \in \langle 0,1\rangle$

Celkem $P(t)$: $x(t) = 4-t$, $y(t) = 1+4t$, $t\in\langle 0,1\rangle$.

PS:

Ale např.

$P_2(t)$: $x(t) = 4-t^2$, $y(t) = 1+4t^2$, $t\in\langle 0,1\rangle$

nebo

$P_3(t)$: $x(t) = 4\cos^2 t+1$, $y(t) = 3+\sin^2 t$, $t\in\langle 0,\pi/2\rangle$

jsou též parametrizace! (Splňují r-ci $y+4x=17$)

Jak je to s parametrizací? Je jednoznačná?

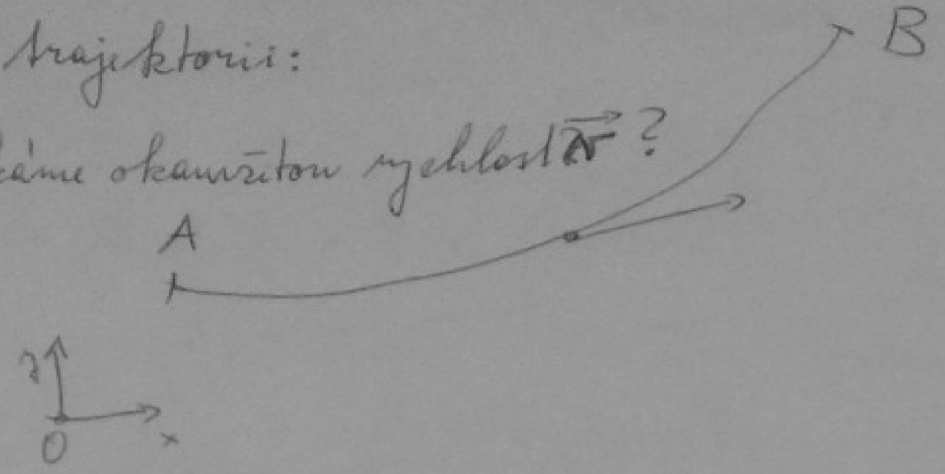
Jak najít tečný vektor k JHK? Na tabuli.

Příklady parametrizace na tabuli.

Př.:

Mějme trajektorii:

Jak získáme okamžitou rychlost $\vec{v}$?



Stejně tak i derivace parametrizace dle parametru ukazuje v tečném směru ke křivce C.

Tj. $$\dot{P}(t) = \left(\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \text{případně } \dot{z}(t)\right)$$

a tečný vektor, který je jednotkový, bude:

a) $$\vec{\tau} = \frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}$$

$\forall t \in (a, b).$

nebo b) $$\vec{\tau} = -\frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}$$

Tj. $\dot{P}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)$, případně $\dot{z}(t))$

a tečný vektor, který je jednotkový, bude:

$$a)\quad \vec{\tau} = \frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}$$

nebo

$$b)\quad \vec{\tau} = -\frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|} \qquad \forall t \in (a, b).$$

Proč a)/b) – proč to +/– ?

Protože orientace křivky (poč. a konc. bod) je zadána, a námi zvolená par. $P(t)$ může být

buď souhlasně orientována s křivkou C (platí a))

nebo nesouhlasně orient. (pak platí b)).

Poznámka:

Orientaci parametrizace můžeme též ověřit dosazením $t = a$ do $P(t)$:

Je-li $P(t=a) = A \Rightarrow$ platí a), je-li $P(t=a) = B \Rightarrow$ platí b) a $P(t)$ je nesouhlasně orientována.

Př.:

Pokračování úsečka:

Je navržená parametrizace souhl./nesouhl.?
(Pokud A je počáteční a B koncový bod)

Derivujme $P(t)$:

$$\dot{P}(t) \equiv \left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}(4-t) = -1 \\ \dot{y}(t) &= \frac{d}{dt}(1+4t) = 4 \end{aligned}\right\} \dot{P}(t) = (-1, 4)$$

a míří od A k B, tj.

$$\underbrace{\vec{\tau} = \pm\frac{(-1,4)}{\|(-1,4)\|} = \frac{1}{\sqrt{17}}(-1,4)}$$ je souhlasná!

Základní křivky (ke skoušce):

- úsečky
- kružnice, elipsy
- část grafu f-ce 1 proměnné
- průniky ploch
- speciální křivky (např. šroubovice, cykloida...)

↳ najdete si ve Sbírce, jak se parametrizují,
a procvičte na cvičení.

Př.:

Navrhněte $P(t)$ pro část paraboly $y = x^2 + 1$ (tj. graf f-ce) mezi body $A = [3, 10]$ a $B = [1, 2]$ ← koncový!

Tip: Pokud $y = f(x)$, volíme $x(t) = t$ a druhá souřadnice je automaticky
$$y(t) = f(t).$$

Zde tento návrh postupu vede na:

$P(t)$: $x(t) = t$

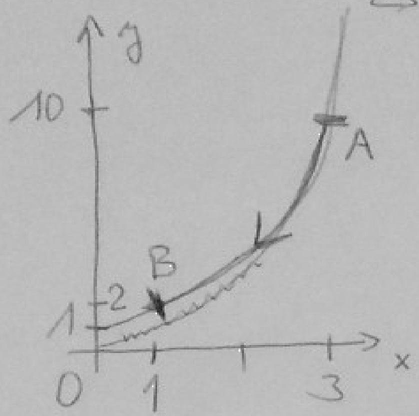
↳ $y(t) = ?$ → dosadím za x ⇒ $y(t) = t^2 + 1$.

Ale $t \in$?

Zde tento návrh postupu vede na:

$P(t)$: $x(t) = t$

↳ $y(t) = ?$ → dosadím za x ⇒ $y(t) = t^2+1$.



<u>Ale $t \in$?</u>

$A = [3, 10]$

Aby $x = 3 = t \Rightarrow t = 3$

<u>Zk:</u> $y = 3^2+1 = 10$ ✓

$B = [1, 2]$

Aby $x = 1 = t \Rightarrow t = 1$

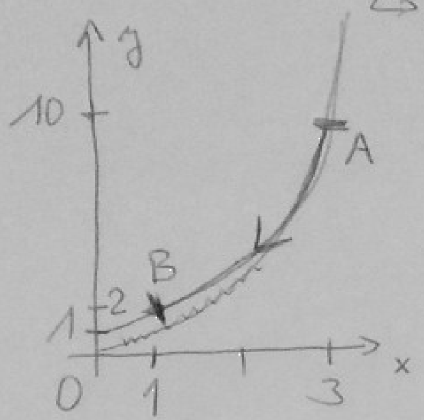
<u>Zk:</u> $y = 1^2+1 = 2$ ✓

$t \in \langle 1, 3 \rangle$

Zde tento návrh postupu vede na:

$$P(t): \quad x(t) = t$$

$\hookrightarrow y(t) = ? \to$ dosadím za $x \Rightarrow y(t) = t^2+1.$



<u>Ale $t \in$?</u>

$A = [3, 10]$

Aby $x = 3 = t \Rightarrow t = 3$

<u>Zk:</u> $y = 3^2+1 = 10$ ✓

$B = [1, 2]$

Aby $x = 1 = t \Rightarrow t = 1$

<u>Zk:</u> $y = 1^2+1 = 2$ ✓

$t \in \langle 1, 3 \rangle$

Protože $P(t=1) = [1,2] = B$, je $P(t)$ nesouhlasně orientována se zadanou orientací křivky.

$\vec{\tau} = ?$

$$\dot{P}(t) \equiv \begin{array}{l} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = 2t \end{array}, \quad \|\dot{P}(t)\| = \|(1, 2t)\| = \sqrt{1+4t^2}$$

$$\hookrightarrow \vec{\tau} = -\frac{(1, 2t)}{\sqrt{1+4t^2}} \quad t \in (1, 3).$$

Ověření správnosti P(t) podle definice:

$$P(t) \equiv \begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = t^2+1 \end{array}$$

t z <1,3>

a) je P(t) prostá na intervalu t z <a,b>?

Stačí, aby alespoň jedna z f-cí $x(t)$, $y(t)$ $\big(, z(t)\big)$ byla prostá. na intervalu t z <a,b>.

Zde $x(t) = t$ je prostá na <1,3> ✓

(a dokonce i t^2+1 je prostá f-ce)

b) má $P(t)$ omezenou a spoj. derivaci $\dot{P}(t)$ v (a,b)?

$\dot{P}(t) = (1, 2t)$ a obě funkce jsou spoj. na $(1,3)$ i omezené.

c) je $\|\dot{P}(t)\|$ nenulové $\forall t \in (a,b)$?

$\|\dot{P}(t)\| = \sqrt{1+4t^2} \neq 0$ pro žádné $t \in (1,3)$.

↳ Parametrizace P(t) popisuje JHK = jednoduchou hladkou křivku

Př.: (opačný postup)

Mějme dánu parametrizaci $P(\varphi)$: $x = 2\cos\varphi$, $y = 2 + 2\sin\varphi$, $\varphi \in \langle \pi/2, 3\pi/2 \rangle$.

Nakreslete křivku, která je nesouhlasně orientována s $P(\varphi)$.

Řešení:

Abych se zbavil φ a získal r-ci křivky, sečtu:

$$x^2 + y^2 = 4\cos^2\varphi + (4 + 8\sin\varphi + 4\sin^2\varphi)$$

Př.: (opačný postup)

Mějme danou parametrizaci $P(\varphi)$: $x = 2\cos\varphi$, $y = 2 + 2\sin\varphi$, $\varphi \in \langle \pi/2, 3\pi/2 \rangle$.

Nakreslete křivku, která je nesouhlasně orientována s $P(\varphi)$.

Řešení:

Abych se zbavil φ a získal r-ci křivky, sečtu:

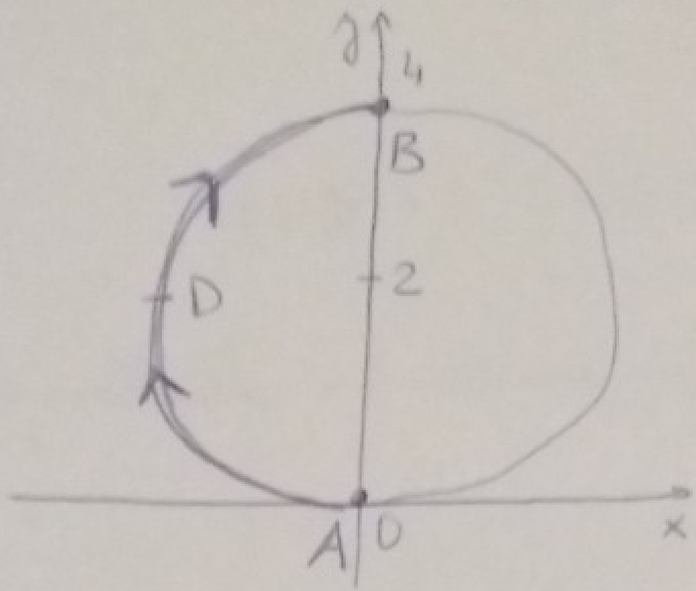
$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 4\cos^2\varphi + (4 + 8\sin\varphi + 4\sin^2\varphi) \\
&= 4(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 1}_{2}) + 8\sin\varphi \\
&= 8 + 8\sin\varphi = 4(\underbrace{2 + 2\sin\varphi}_{y}) = 4y
\end{aligned}
$$

$$x^2 + y^2 = 4y \iff x^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow \text{kružnice}$$

(Alternativně – vzpomínáte si na zobecněné polární souřadnice?)

$x^2+y^2=4y \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=4 \Rightarrow$ kružnice

(Alternativně – vzpomínáte si na zobecněné polární souřadnice?)



Bod A dostanu pro $\varphi = 3\pi/2$

(nesouhlasná orientace $P(\varphi)$)

$$P(\varphi = 3\pi/2) = [2\cos 3\pi/2 = 0;\ 2+2\sin 3\pi/2 = 0]$$

<u>$B \rightarrow \varphi = \pi/2$:</u>

$$B = P(\varphi = \pi/2) = [2\cos \pi/2 = 0;\ 2+2\sin \pi/2 = 4]$$

<u>Pravá/levá půlkružnice?</u>

1 $P(\varphi = \pi)$ leží na křivce

$$P(\varphi = \pi) = [-2, 2] = D.$$

Jednoduchá po částech hladká křivka

Na tabuli.

III.1.8. Jednoduchá po částech hladká křivka. Předpokládejme, že $C_1, \ldots, C_n$ jsou jednoduché hladké křivky v $\mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$) takové, že

a) $k.b.\,C_1 = p.b.\,C_2$, $k.b.\,C_2 = p.b.\,C_3, \ldots, k.b.\,C_{n-1} = p.b.\,C_n$,

b) kromě bodů zmíněných v a) a kromě možného případu, kdy $p.b.\,C_1 = k.b.\,C_n$, nemají žádné dvě z křivek $C_1, \ldots, C_n$ žádný další společný bod.

Pak sjednocení $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ nazýváme *jednoduchou po částech hladkou křivkou* v $\mathbb{E}_k$. (Zápis často zkracujeme na "jednoduchá p. č. hladká křivka".)

Orientace jednoduché p. č. hladké křivky C je dána orientací jejích jednotlivých hladkých částí $C_1, \ldots, C_n$. Pokládáme $p.b.\,C = p.b.\,C_1$ (počáteční bod C) a $k.b.\,C = k.b.\,C_n$ (koncový bod C).

Křivku, která se od C liší pouze orientací, označujeme $-C$.

Jednoduchá p. č. hladká křivka C se nazývá *uzavřená*, jestliže $p.b.\,C = k.b.\,C$.

III.1.8. Jednoduchá po částech hladká křivka. Předpokládejme, že $C_1, \ldots, C_n$ jsou jednoduché hladké křivky v $\mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$) takové, že

a) $k.b.\, C_1 = p.b.\, C_2$, $k.b.\, C_2 = p.b.\, C_3, \ldots, k.b.\, C_{n-1} = p.b.\, C_n$,

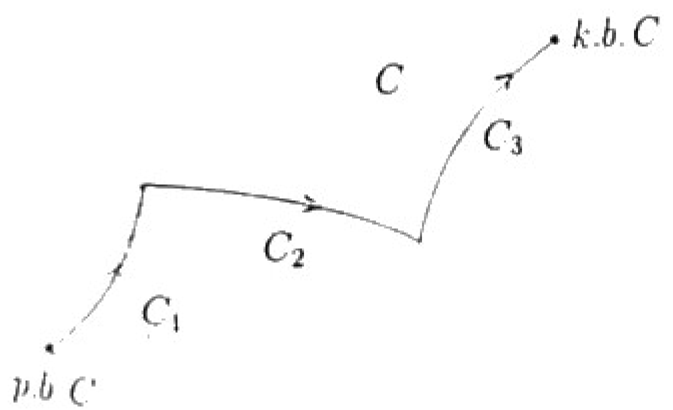
b) kromě bodů zmíněných v a) a kromě možného případu, kdy $p.b.\, C_1 = k.b.\, C_n$, nemají žádné dvě z křivek $C_1, \ldots, C_n$ žádný další společný bod.

Pak sjednocení $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$ nazýváme *jednoduchou po částech hladkou křivkou* v $\mathbb{E}_k$. (Zápis často zkracujeme na "jednoduchá p. č. hladká křivka".)

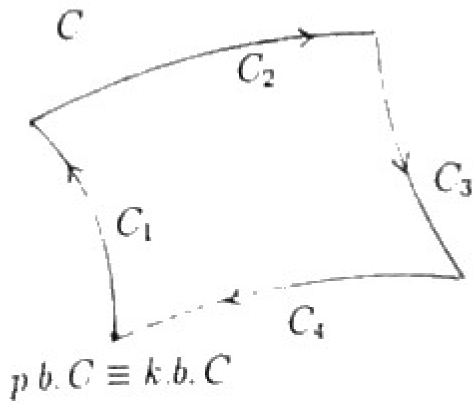
Orientace jednoduché p. č. hladké křivky C je dána orientací jejích jednotlivých hladkých částí $C_1, \ldots, C_n$. Pokládáme $p.b.\, C = p.b.\, C_1$ (počáteční bod C) a $k.b.\, C = k.b.\, C_n$ (koncový bod C).

Křivku, která se od C liší pouze orientací, označujeme $-C$.

Jednoduchá p. č. hladká křivka C se nazývá *uzavřená*, jestliže $p.b.\, C = k.b.\, C$.



Obr. 18a



Obr. 18b

Na obr. 18a a 18b vidíte příklady jednoduchých p. č. hladkých křivek. Křivka na obr. 18b je uzavřená.

Abychom mohli s parametrizací počítat, (pokračovat v integr.) co vše musíme mít připravené?

---

a) návrh f-cí $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, tj. prostě předpis pro $P(t)$

b) interval pro t

c) orientaci $P(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$

d) $\dot{P}(t)$

e) $\|\dot{P}(t)\|$