

Matematika II – přednáška 16

Co bude dneska?

Křivka zadaná průnikem dvou ploch.

Křivkový integrál skalární funkce.

Základní vlastnosti křivkového integrálu skal. funkce.

Délka křivky. Vybrané mechanické charakteristiky křivek.

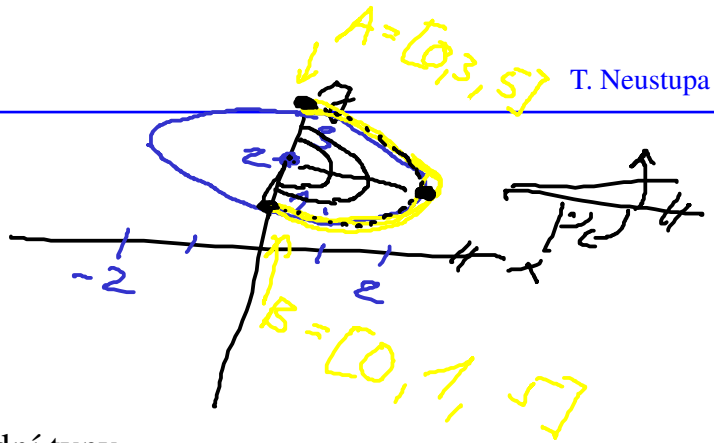
Nějaké příklady

Tyto slidy jsou na adrese

[http : //marian.fsik.cvut.cz/~neustupa/M2_Neu_prednaska16.pdf](http://marian.fsik.cvut.cz/~neustupa/M2_Neu_prednaska16.pdf)

(pro osobní potřeby).

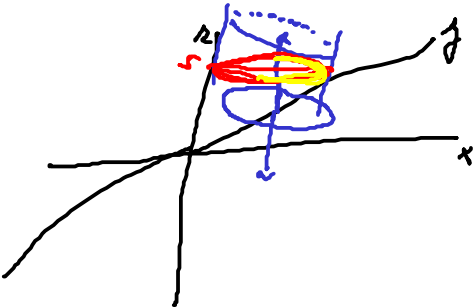
Shrnutí co bylo minule



Jednoduchá hladká křivka.

Parametrizace - definice, vlastnosti, základní typy.

Pr: Křivka $C \subset E^3$ je dána $\frac{x^2}{4} + \frac{(z-2)^2}{25} = 1; x \geq 0; A = [0, 3, 5]$
 $B = ? \Rightarrow P(t) = ?$



$P(\varphi) =$

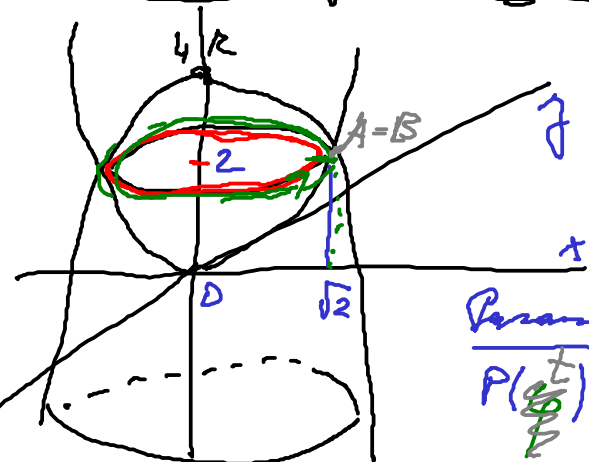
$x(\varphi) = 0 + 2 \cdot 1 \cdot \cos \varphi$
 $z(\varphi) = 2 + 5 \cdot 1 \cdot \sin \varphi$
 $R(\varphi) = 5$

$\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
 orientace nesouhl.

Křivka zadaná průnikem dvou ploch v \mathbb{E}_3

Ukážeme na příkladu na tabuli.

Př.: 1, 2 plochy $R = x^2 + y^2$ a $R = 4 - x^2 - y^2 \Rightarrow$ parametr. průsečnice?
 + info o orientaci křivky



$$R = x^2 + y^2 = 4 - x^2 - y^2$$

$$2x^2 + 2y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$R = x^2 + y^2 = 2$$

Parametrizace křivky:

$$P\left(\frac{t}{\phi}\right): \begin{matrix} x(\phi) = \sqrt{2} \cos \phi \\ y(\phi) = \sqrt{2} \sin \phi \\ z(\phi) = 2 \end{matrix}$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Př.:

if orientace křivky

2) $\sigma: r = x^2 + y^2$ a $\rho: 4x - 2y - 2z - \frac{1}{2} = 0$

→ průnik ploch σ a $\rho = ?$

EUPSA

$r = x^2 + y^2$

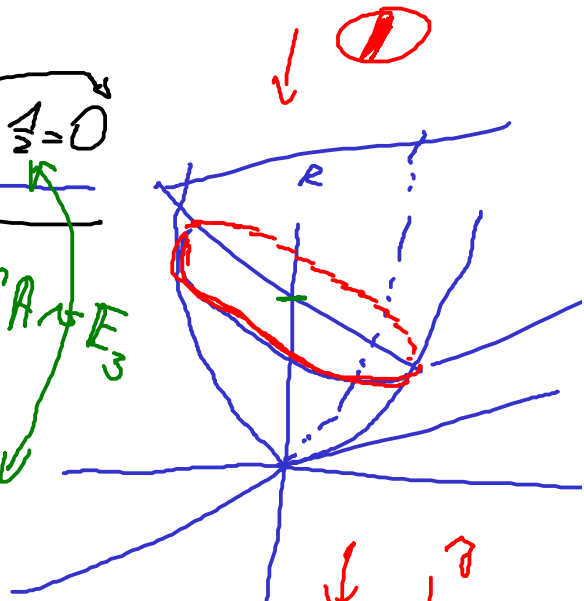
$2r = 4x - 2y - \frac{1}{2}$

$r = 2x - y - \frac{1}{4}$

$x^2 + y^2 = 2x - y - \frac{1}{4}$

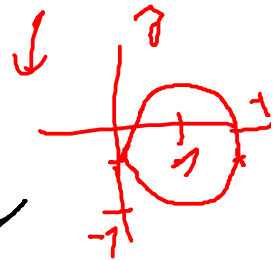
$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + y + \frac{1}{4} = 0$
 $(x-1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 0 + 1$

- $x = 1 + 1 \cdot \cos \varphi$
- $y = -\frac{1}{2} + 1 \cdot \sin \varphi$



při pohledu shora

kurvici o $r=1$
 $S = [1, -\frac{1}{2}, ?]$

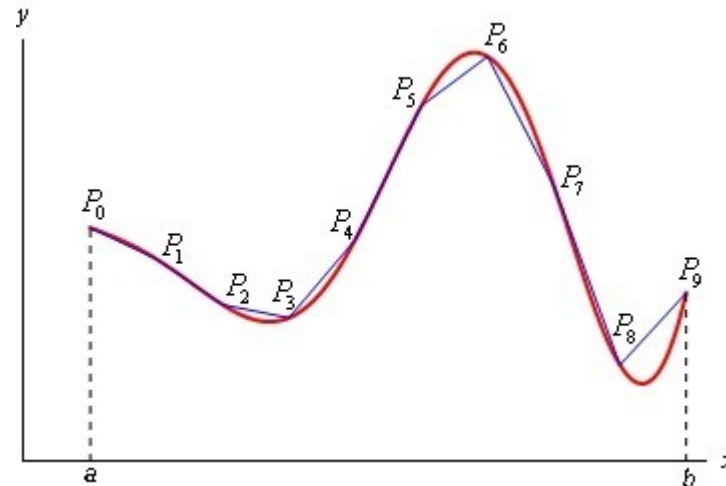


$r(\varphi) = 2(1 + \cos \varphi) - (-\frac{1}{2} + \sin \varphi)$
 $= \frac{9}{4} + 2 \cos \varphi - \sin \varphi$

Křivkový integrál ze skaláru



Moment setrvačnosti švihadla



Délka křivky



Váha cívky

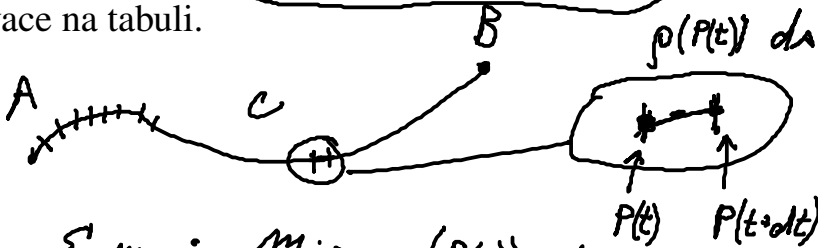
Tento příklad použijeme v dále motivaci.

Křivkový integrál skalární funkce (KI 1.druhu)

$$\rightarrow \int_C \rho(P) ds$$

hmotnost dráhy

Motivace na tabuli.



hmotnost C
popisuje P(t)
 $t \in \langle a, b \rangle$

$$- m = \sum m_i ; m_i = \int \rho(P(t)) ds$$

$$ds = \underbrace{\|P(t+dt) - P(t)\|}_{\dot{P}(t) dt} = \|dt \cdot \dot{P}(t)\| = \|\dot{P}(t)\| dt$$

$$m = \sum \rho(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\| dt \rightarrow \int_a^b \rho(P(t)) \|\dot{P}(t)\| dt$$

Křivkový integrál skalární funkce (KI 1.druhu)

Definice (křivkový integrál skalární funkce na jednoduché hladké křivce). Nechť C je jednoduchá hladká křivka v \mathbb{E}_2 nebo v \mathbb{E}_3 a P je její parametrizace, definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$. Nechť f je funkce, která je definovaná a omezená na křivce C . Existuje-li Riemannův integrál $\int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\| dt$, pak o funkci f říkáme, že je *integrovatelná* na křivce C . *Křivkový integrál* skalární funkce f na křivce C pak označujeme $\int_C f ds$ a definujeme jej rovnicí

$$\int_C f ds = \int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\| dt.$$

Říkáme, že “funkce f je integrovatelná na křivce C ” či, že “křivkový integrál funkce f na C existuje”.

Křivkový integrál skalární funkce (KI 1.druhu)

Definice (křivkový integrál skalární funkce na jednoduché hladké křivce). Nechť C je jednoduchá hladká křivka v \mathbb{E}_2 nebo v \mathbb{E}_3 a P je její parametrizace, definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$. Nechť f je funkce, která je definovaná a omezená na křivce C . Existuje-li Riemannův integrál $\int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\| dt$, pak o funkci f říkáme, že je *integrovatelná* na křivce C . *Křivkový integrál* skalární funkce f na křivce C pak označujeme $\int_C f ds$ a definujeme jej rovnicí

$$\int_C f ds = \int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\| dt.$$

Říkáme, že “funkce f je integrovatelná na křivce C ” či, že “křivkový integrál funkce f na C existuje”.

Poznámka: Existence ani hodnota křivkového integrálu *nezávisí na zvolené parametrizaci křivky C* .

Jednoduchá po částech hladká křivka

Buď C_i , $i = 1 \dots n$, hladká jednoduchá křivka. Buď dále $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$. Pak C nazýváme **jednoduchá po částech hladká křivka**.

Příklady na tabuli.

Definice (křivkový integrál skalární funkce na jednoduché po částech hladké křivce). Nechť C je jednoduchá po částech hladká křivka v \mathbb{E}_2 nebo v \mathbb{E}_3 , která je složena z jednoduchých hladkých křivek C_1, \dots, C_n . Nechť f je skalární funkce, která je definovaná a omezená na křivce C . Je-li funkce f integrovatelná na každé z křivek C_1, \dots, C_n , pak říkáme, že je *integrovatelná* na křivce C . *Křivkový integrál* skalární funkce f na křivce C pak definujeme rovnicí

$$\int_C f \, ds = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f \, ds.$$

Délka křivky

Je-li C jednoduchá po částech hladká křivka v \mathbb{E}_2 nebo v \mathbb{E}_3 , pak integrálem $\int_C ds$ definujeme délku křivky C . Značíme ji $l(C)$.

Z předešlých úvah plyne, že ve speciálním případě, kdy C je jednoduchá hladká křivka a P je její parametrizace definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$, můžeme délku křivky C vyjádřit:

$$l(C) = \int_C ds = \int_a^b \|\dot{P}(t)\| dt.$$

Důležité vlastnosti křivkového integrálu skalární funkce

Křivkový integrál je definován pomocí jednorozměrného Riemanova integrálu. Většina vlastností obou integrálů je tedy stejná.

- a) **Postačující podmínka pro existenci křivkového integrálu skalární funkce.** Je-li funkce f spojitá na jednoduché po částech hladké křivce C , pak je na křivce C integrovatelná (tj. integrál $\int_C f ds$ existuje).
- b) **Linearita křivkového integrálu.** Jsou-li f a g integrovatelné funkce na křivce C a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $f + g$ a αf jsou také integrovatelné funkce na C a

$$\int_C (f + g) ds = \int_C f ds + \int_C g ds,$$

$$\int_C \alpha \cdot f ds = \alpha \cdot \int_C f ds.$$

c) Je-li f integrovatelná funkce na křivce C a funkce g se liší od f nejvýše v konečně mnoha bodech, pak g je také integrovatelná funkce na křivce C a

$$\int_C g \, ds = \int_C f \, ds.$$

d) Je-li f integrovatelná funkce na křivce C , pak je také integrovatelnou funkcí na křivce $-C$ a

$$\int_{-C} f \, ds = - \int_C f \, ds.$$

"směrnost dráha nezávisí na orientaci křivky"

e) Jsou-li f a g integrovatelné funkce na křivce C takové, že $f(X) \geq g(X)$ ve všech bodech $X \in C$, pak

$$\int_C f \, ds \geq \int_C g \, ds.$$

Speciálně, je-li $f(X) \geq 0$ ve všech bodech $X \in M$, pak $\int_C f \, ds \geq 0$.

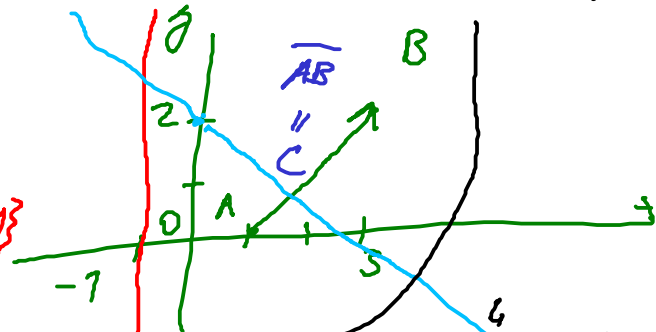
Useba $\overline{AB} \Rightarrow A=[1,0], B=[3,2] \quad \dot{P}(t) = (2,2)$

$$P(t) = \begin{cases} x = 1 + t \cdot (2) \\ y = 0 + t \cdot (2) \end{cases}, t \in (0,1)$$

$$\|\dot{P}(t)\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

1) $I = \int_{\overline{AB}} \frac{1}{x+1} ds = ?$ existuje

$f(x,y) = \frac{1}{x+1}$ spoj. na $E_2 \setminus \{x=-1\}$



$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1+2t)+1}} \cdot \frac{\|\dot{P}(t)\|}{\sqrt{8}} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{8}}{2t+2} dt = \left[\begin{matrix} u=2t+2 \\ du=2dt \\ 0 \rightarrow 2 \\ 1 \rightarrow 4 \end{matrix} \right] = \sqrt{8} \int_2^4 \frac{1}{u} \frac{du}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{8}}{2} (\ln(4) - \ln(2)) = \frac{\sqrt{8}}{2} \ln \frac{4}{2}$$

2) $\int_{\overline{AB}} \frac{1}{x+y-2} ds$; $f(x,y) = \frac{1}{x+y-2}$ spoj. na $E_2 \setminus \{y=2-x\}$

max. protore $f(x,y)$ nem' spoj. a def. $\forall x \in \mathbb{R}$

Výpočet křivkového integrálu skalární funkce

Předpokládejme, že $P = [\phi, \psi, \vartheta]$ je parametrizace jednoduché hladké křivky C , definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$.

Integrál počítáme pomocí předchozího vzorce.

a) dosadíme do funkce f :

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \vartheta(t),$$

b) dosadíme do integrálu za ds :

$$ds = \|\dot{P}(t)\| dt = \|(\dot{\phi}(t), \dot{\psi}(t), \dot{\vartheta}(t))\| dt = \sqrt{\dot{\phi}(t)^2 + \dot{\psi}(t)^2 + \dot{\vartheta}(t)^2} dt,$$

c) integrujeme podle t na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Příklady na tabuli.

Některé aplikace křivkového integrálu skalární funkce

Předpokládejme, že drát nebo struna má tvar křivky C v \mathbb{E}_k ($k = 2$ nebo $k = 3$). Na křivce je rozložena hmota s délkovou hustotou $\rho(x, y)$ (je-li $k = 2$) nebo $\rho(x, y, z)$ (je-li $k = 3$). (ρ je hmotnost, vztažená k jednotce délky.

I. $k = 2$

celková hmotnost $m = \int_C \rho(x, y) ds$ [kg],

statický moment

vzhledem k ose x $m_x = \int_C y \cdot \rho(x, y) ds$ [kg · m],

vzhledem k ose y $m_y = \int_C x \cdot \rho(x, y) ds$ [kg · m],

souřadnice těžiště $x_T = \frac{m_y}{m}$, $y_T = \frac{m_x}{m}$ [m],

moment setrvačnosti

vzhledem k ose x ... $J_x = \int_C y^2 \cdot \rho(x, y) ds$ [kg · m²],

vzhledem k ose y ... $J_y = \int_C x^2 \cdot \rho(x, y) ds$ [kg · m²],

vzhledem k počátku . $J_0 = \int_C (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y) ds$ [kg · m²].

II. $k = 3$

celková hmotnost .. $m = \int_C \rho(x, y, z) ds$ [kg],

statický moment

vzhledem k rovině xy $m_{xy} = \int_C z \cdot \rho(x, y, z) ds$ [kg · m],

vzhledem k rovině xz $m_{xz} = \int_C y \cdot \rho(x, y, z) ds$ [kg · m],

vzhledem k rovině yz $m_{yz} = \int_C x \cdot \rho(x, y, z) ds$ [kg · m],

souřadnice těžiště .. $x_T = \frac{m_{yz}}{m}$, $y_T = \frac{m_{xz}}{m}$ $z_T = \frac{m_{xy}}{m}$ [m],

moment setrvačnosti

vzhledem k rovině xy $J_{xy} = \int_C z^2 \cdot \rho(x, y, z) ds$ $[\text{kg} \cdot \text{m}^2],$

vzhledem k rovině xz $J_{xz} = \int_C y^2 \cdot \rho(x, y, z) ds$ $[\text{kg} \cdot \text{m}^2],$

vzhledem k rovině yz $J_{yz} = \int_C x^2 \cdot \rho(x, y, z) ds$ $[\text{kg} \cdot \text{m}^2],$

vzhledem k ose x ... $J_x = \int_C (y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) ds$ $[\text{kg} \cdot \text{m}^2],$

vzhledem k ose y $J_y = \int_C (x^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) ds$ $[\text{kg} \cdot \text{m}^2],$

vzhledem k ose z $J_z = \int_C (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z) ds$ $[\text{kg} \cdot \text{m}^2],$

vzhledem k počátku . $J_0 = \int_C (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) ds$ $[\text{kg} \cdot \text{m}^2].$

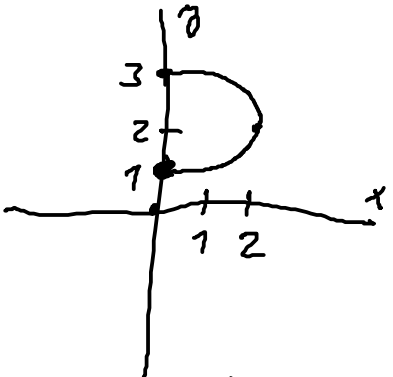
$$P_{\vec{r}}: \Rightarrow \int_C x \cdot y \, ds = ?$$

C ~~nejednotlivě~~ orientovaná elipsa

p. f. b. $A = [0, 3]$

$$\frac{x^2}{4} + (y-2)^2 = 1 \quad x \geq 0$$

viz 1. př. této přednášky:



$$P(t): \dots x(t) = 0 + 2 \cdot 1 \cdot \cos t = \underline{2 \cos t}$$

$$y(t) = 2 + 1 \cdot 1 \cdot \sin t = \underline{2 + \sin t}$$

$$t \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$$

nesoulad. orientována!

$$\Rightarrow \vec{P}(t) = (2 \sin t, \cos t) \Rightarrow \|\vec{P}(t)\| = \sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t}$$

$$\int_C x y \, ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos t \cdot (2 + \sin t) \cdot \sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t} \, dt =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4 \cos t + 2 \sin t \cos t) \sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t} \, dt$$

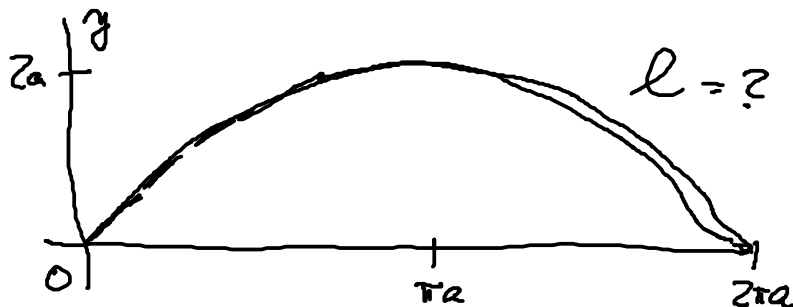
Omlouvám se, výsledný integrál je silný...

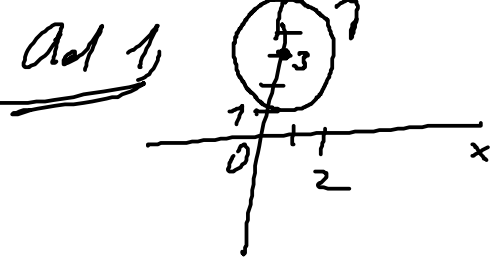
Radeji zkuste spocitat:

$$1) I = \int_C xy \, ds; \quad C: \begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 4 \\ y \geq 3 \end{cases}$$

$I = ?$

2, délka cykloidy? Dána $P(t) = \begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$





$$P(\varphi) = \begin{cases} x = 2 \cos \varphi \\ y = 3 + 2 \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle$$

orientace nezměnila!

$$\dot{P}(\varphi) = (-2 \sin \varphi, 2 \cos \varphi) \text{ ale polna' se o} \\ \text{třikrát int. 1. deriv.}$$

$$\|\dot{P}(\varphi)\| = \sqrt{4 \sin^2 \varphi + 4 \cos^2 \varphi} = 2$$

↳ přesalvis' na orientaci

$$I = \int_C x y dx = \int_0^\pi 2 \cos \varphi \cdot (3 + 2 \sin \varphi) \cdot 2 d\varphi = \\ = \int_0^\pi 12 \cos \varphi + 8 \cdot \frac{\cos \varphi \cdot \sin \varphi}{\frac{1}{2} \sin 2\varphi} d\varphi = 12 [\sin \varphi]_0^\pi + 0 \\ = 0$$

subst. nebo integral přes 1 periodu $f = \cos \sin 2\varphi \Rightarrow x=0$

Ad 2)

$$\frac{P(t) \text{ daño}}{\dot{P}(t)} = a \cdot (1 - \cos t, \sin t)$$

$$\|\dot{P}(t)\| = a \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = a \sqrt{2 - 2 \cos t}$$

$$l = \int_c^c 1 ds = \int_0^{2\pi} 1 \cdot a \sqrt{2} \underbrace{\sqrt{1 - \cos t} \cdot \sqrt{2}}_{\sqrt{2}} dt$$

$$= \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} \sqrt{2} |\sin \frac{t}{2}| dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt =$$

$$= 2a \left[-2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = -4a(-1-1) = \underline{\underline{8a}}$$