Matematika II – přednáška 17

Co bude dneska?

Křivkový integrál vektorové funkce.

Základní vlastnosti křivkového integrálu vektorové funkce.

Fyzikální význam křivkového integrálu vektorové funkce.

Souvislosti mezi křivkovým integrálem skalární a vektorové funkce.

Nějaké příklady

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska17.pdf$
(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

Křivkový integrál skalární funkce (1.druhu).

Výpočet, vlastnosti, použití.

Křivkový integrál skalární funkce (KI 1.druhu) - opakování

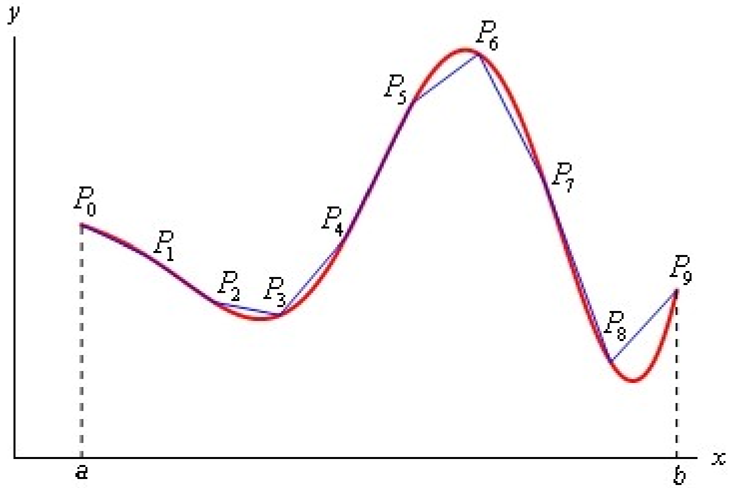
Definice (křivkový integrál skalární funkce na jednoduché hladké křivce). Nechť C je jednoduchá hladká křivka v $\mathbb{E}_2$ nebo v $\mathbb{E}_3$ a P je její parametrizace, definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť f je funkce, která je definovaná a omezená na křivce C. Existuje-li Riemannův integrál $\int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\|\, dt$, pak o funkci f říkáme, že je *integrovatelná* na křivce C. *Křivkový integrál* skalární funkce f na křivce C pak označujeme $\int_C f\, ds$ a definujeme jej rovnicí

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\|\, dt.$$

Říkáme, že "funkce f je integrovatelná na křivce C" či, že "křivkový integrál funkce f na C existuje".

Křivkový integrál ze skaláru

Moment setrvačnosti švihadla



Délka křivky

Váha cívky

Vektorová funkce

Používá se buď pojem vektorová funkce nebo vektorové pole. (viz. obrázek).

Značení: Vektorové funkce v $\mathbb{E}_3$ budeme většinou zapisovat:

$$\mathbf{f}(x,y,z)$$
$$= \big(U(x,y,z),\, V(x,y,z),\, W(x,y,z)\big) \;=\; U(x,y,z)\,\mathbf{i} + V(x,y,z)\,\mathbf{j} + W(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

nebo zkráceně $\mathbf{f} \;=\; (U,V,W) \;=\; U\,\mathbf{i} + V\,\mathbf{j} + W\,\mathbf{k}$.

(U, V a W jsou souřadnicové funkce vektorové funkce f.)

V případě vektorové funkce v $\mathbb{E}_2$ je situace stejná, pouze je zápis o jednu komponentu kratší.

Příklad na tabuli.

$F = (x+y,\ x-y^2,\ \sqrt{z}-x)$

můžeme též zapsat jako

$$F = (x+y)\vec{i} + (x-y^2)\vec{j} + (\sqrt{z}-x)\vec{k}$$

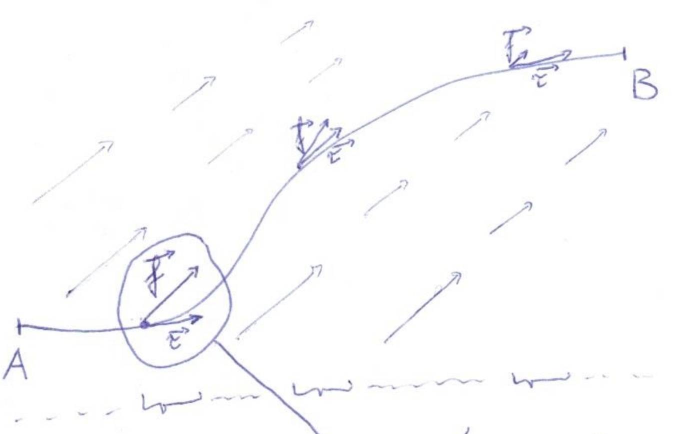
Fyzikální motivace

Na tabuli.

Vzpomínáte si na středoškolský vzoreček pro práci vykonanou silou $\vec{f}$ po dráze o délce l ?

$$(A=)\ W = f \cdot l \cdot \cos \alpha,$$ kde α je úhel sevřený mezi vektorem síly $\vec{f}$ a přímkou, po které se těleso pohybuje

Tak tím se teď budeme zabývat.
Rozdíl? Dovolíme síle $\vec{f}$, aby byla v každém bodě jiná (a ne konstantní jako předtím)
a ~~…~~ přímku nahradíme lib. křivkou.



Příspěvky k vykonané práci / spotřebované energii jsou

Vzpomínáte si na středoškolský vzoreček pro práci vykonanou silou $\vec{f}$ po dráze o délce l ?

$$(A=)\ W = f \cdot l \cdot \cos\alpha,$$ kde α je úhel sevřený mezi vektorem síly $\vec{f}$ a přímkou, po které se těleso pohybuje

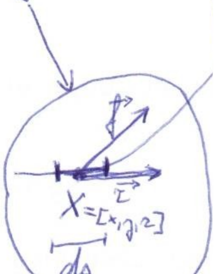
Tak tím se teď budeme zabývat.

Rozdíl? Dovolíme <u>síle $\vec{f}$</u>, aby byla v každém bodě jiná (a ne konstantní jako předtím)

a přímku nahradíme <u>lib. křivkou.</u>

Příspěvky k vykonané práci / spotřebované energii jsou

$$dA = \vec{f}(x,y,z) \cdot \vec{\tau}(x,y,z)\, ds$$



Celkem pak

$$A = (W=) \int_C dA$$

$$= \int_C \vec{f}(x,y,z) \cdot \vec{\tau}(x,y,z)\, ds \quad \left(= \int_C \vec{f}(x,y,z) \cdot d\vec{s} \right)$$

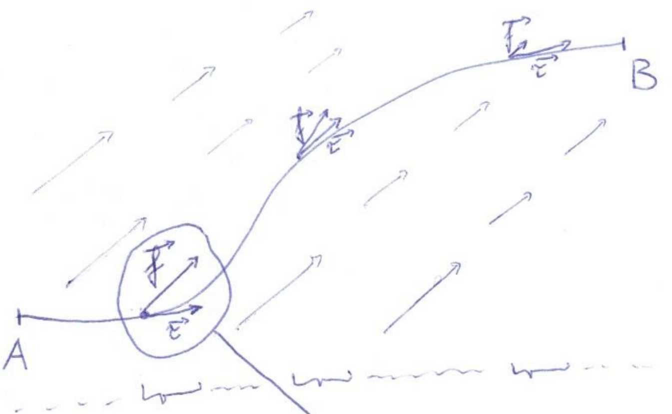
Vzpomínáte si na středoškolský vzoreček pro práci vykonanou silou $\vec{f}$ po dráze o délce l?

$(A=)\ W = f\cdot l\cdot \cos\alpha$, kde α je úhel sevřený mezi vektorem síly $\vec{f}$ a přímkou, po které se těleso pohybuje

Tak tím se teď budeme zabývat.

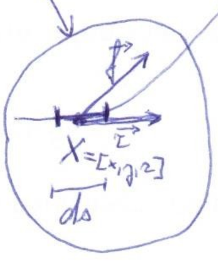
Rozdíl? Dovolíme síle $\vec{f}$, aby byla v každém bodě jiná (a ne konstantní jako předtím)

a ~~…~~ přímku nahradíme lib. křivkou.



Příspěvky k vykonané práci / spotřebované energii jsou

$$dA = \vec{f}(x,y,z)\cdot\vec{\tau}(x,y,z)\,ds$$



Fyzikální význam: k práci ~~…~~ přispívá jen ta část síly, která působí ve směru pohybu, tj. průmět $\vec{f}$ do směru $\vec{\tau}$, matematicky $\vec{f}\cdot\vec{\tau}$.

Celkem pak

$$A=(W=)\int_C dA$$

$$= \int_C \vec{f}(x,y,z)\cdot\vec{\tau}(x,y,z)\,ds \quad \left(= \int_C \vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{s}\right)$$

← ve smyslu $\vec{\tau}\,ds = d\vec{s}$, neboli $d\vec{s}$ je vektor o délce ds a směru $\vec{\tau}$.

Křivkový integrál vektorové funkce - definice

Definice (křivkový integrál vektorové funkce). Nechť C je jednoduchá po částech hladká křivka v $\mathbb{E}_k$ (kde $k = 2$ nebo $k = 3$) a $\mathbf{f}$ je vektorová funkce, která je definovaná a omezená na křivce C. Říkáme, že vektorová funkce $\mathbf{f}$ je *integrovatelná* na křivce C, je-li skalární funkce $\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}$ integrovatelná na C. Integrál $\int_C \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}\, ds$ nazýváme *křivkovým integrálem* vektorové funkce $\mathbf{f}$ na křivce C a označujeme jej kratším způsobem $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$.

Místo "křivkový integrál vektorové funkce" se často používá název *křivkový integrál 2. druhu*.

Základním významem je práce kterou vykoná síla $\mathbf{f}$ působící po dráze C.

Zápisy KI 2.druhu

Z definice vyplývá, že zapisujeme $\boldsymbol{\tau}\, ds = d\mathbf{s}$.

Zápisy KI 2.druhu

Z definice vyplývá, že zapisujeme $\boldsymbol{\tau}\, ds = d\mathbf{s}$.

$d\mathbf{s}$ je nekonečně krátký vektor, jehož složky jsou dx, dy a dz. Použijeme-li toto značení, můžeme psát

$$\boldsymbol{\tau}\, ds \;=\; d\mathbf{s} \;=\; (dx, dy, dz) \;=\; \mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy + \mathbf{k}\, dz.$$

Zápisy KI 2.druhu

Z definice vyplývá, že zapisujeme $\boldsymbol{\tau}\, ds = d\mathbf{s}$.

$d\mathbf{s}$ je nekonečně krátký vektor, jehož složky jsou dx, dy a dz. Použijeme-li toto značení, můžeme psát

$$\boldsymbol{\tau}\, ds \;=\; d\mathbf{s} \;=\; (dx, dy, dz) \;=\; \mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy + \mathbf{k}\, dz.$$

$\mathbf{f}$ je vektorová funkce, když ji rozepíšeme do složek jako $\mathbf{f} = (U, V, W)$, pak můžeme skalární součin $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ vyjádřit jako:

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \;=\; (U, V, W) \cdot (dx, dy, dz) \;=\; U\, dx + V\, dy + W\, dz$$

a křivkový integrál funkce $\mathbf{f}$ lze potom zapsat jako

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \;=\; \int_C \big(U\, dx + V\, dy + W\, dz\big).$$

Příklad na tabuli.

Různé zápisy křivk. int.

$$\int_C (y^2, z^2, x^2) \cdot \underset{\overset{\parallel}{(dx, dy, dz)}}{d\vec{s}} = \int_C \left[y^2 \vec{i} + z^2 \vec{j} + x^2 \vec{k} \right] \cdot d\vec{s} = \int_C y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$$

Důležité vlastnosti křivkového integrálu vektorové funkce

Křivkový integrál vektorové funkce je definován pomocí křivkového integrálu skalární funkce, tj. vlastnosti zůstávají stejné.

Vyjímkou je

Věta. *Je-li vektorová funkce* $\mathbf{f}$ *integrovatelná na křivce* C*, pak je integrovatelná i na křivce* $-C$ *a*

$$\int_{-C} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = -\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

Změní-li se znaménko tečného vektoru tak se též změní znaménko celého integrálu.

Důkaz závislosti na orientaci

Počítejme $\int_{-C} \vec{f}\cdot d\vec{s}$.

Protože je křivka $-C$ opačně orientovaná (než C), je i její tečný vektor opačně orientovaný

$$\vec{\tau}_{-C} = -\vec{\tau}_{C}.$$

Pak

$$\int_{-C} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{-C} \vec{f}\cdot \vec{\tau}_{-C}\, ds = \int_{-C} \vec{f}\cdot (-\vec{\tau}_{C})\, ds$$

$$= -\int_{C} (\vec{f}\cdot \vec{\tau}_{C})\, ds = -\int_{C} \vec{f}\cdot d\vec{s} \quad \blacksquare$$

Důkaz závislosti na orientaci

Počítejme $\int_{-C} \vec{f}\cdot d\vec{s}$.

Protože je křivka $-C$ opačně orientovaná (než C), je i její tečný vektor opačně orientovaný

$$\vec{\tau}_{-C} = -\vec{\tau}_{C}.$$

Pak

$$\int_{-C} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{-C} \vec{f}\cdot\vec{\tau}_{-C}\,ds = \int_{-C} \vec{f}\cdot(-\vec{\tau}_{C})\,ds$$

$$= -\int_{C} (\vec{f}\cdot\vec{\tau}_{C})\,ds = -\int_{C} \vec{f}\cdot d\vec{s} \quad \blacksquare$$

Memo technická pomůcka

křiv. int. ze skalární f-ce = $\int_C f\,ds$ má fyz. význam např. hmotnosti drátu
tj. ta nezávisí na tom, kde má drát začátek a konec

křiv. int. ze vektorové f-ce = $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s}$ má fyz. význam vykonané práce podél křivky
tj. ta závisí na orientaci křivky,
aneb je rozdíl, jestli jdu do kopce nebo z kopce!

Výpočet křivkového integrálu vektorové funkce

Nechť $\mathbf{f} = (u, v, w)$ je vektorová funkce, C JHK a P je parametrizace křivky C definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Dále předpokládejme, že křivka C je orientována souhlasně s parametrizací P.

Výpočet křivkového integrálu vektorové funkce

Nechť $\mathbf{f} = (u, v, w)$ je vektorová funkce, C JHK a P je parametrizace křivky C definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Dále předpokládejme, že křivka C je orientována souhlasně s parametrizací P.

Jednotkový tečný vektor v každém bodě $P(t)$ ($t \in \langle a, b \rangle$) křivky C je $\boldsymbol{\tau} = \dot{P}(t)/\|\dot{P}(t)\|$

Výpočet křivkového integrálu vektorové funkce

Nechť $\mathbf{f} = (u, v, w)$ je vektorová funkce, C JHK a P je parametrizace křivky C definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Dále předpokládejme, že křivka C je orientována souhlasně s parametrizací P.

Jednotkový tečný vektor v každém bodě $P(t)$ $(t \in \langle a, b\rangle)$ křivky C je $\boldsymbol{\tau} = \dot{P}(t)/\|\dot{P}(t)\|$

Dostáváme

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}\, ds = \int_a^b \mathbf{f}(P(t)) \cdot \frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}\, \|\dot{P}(t)\|\, dt,$$

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(P(t)) \cdot \dot{P}(t)\, dt.$$

Výpočet křivkového integrálu vektorové funkce

Nechť $\mathbf{f} = (u, v, w)$ je vektorová funkce, C JHK a P je parametrizace křivky C definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Dále předpokládejme, že křivka C je orientována souhlasně s parametrizací P.

Jednotkový tečný vektor v každém bodě $P(t)$ ($t \in \langle a, b\rangle$) křivky C je $\boldsymbol{\tau} = \dot{P}(t)/\|\dot{P}(t)\|$

Dostáváme

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}\, ds = \int_a^b \mathbf{f}(P(t)) \cdot \frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}\, \|\dot{P}(t)\|\, dt,$$

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(P(t)) \cdot \dot{P}(t)\, dt.$$

Pozn.: opačně orientovaný tečný vektor, vzorec v $\mathbb{E}_2$, po částech JHK.

Příklady na tabuli.

Def: Je-li křivka C jednoduchá po částech hladká křivka (JpčHK), tj. dá-li se zapsat jako $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, kde křivky C_i jsou JHK, pak křivkový integrál z vekt. f-ce po křivce definujeme jako

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} \vec{f} \cdot d\vec{s},$$

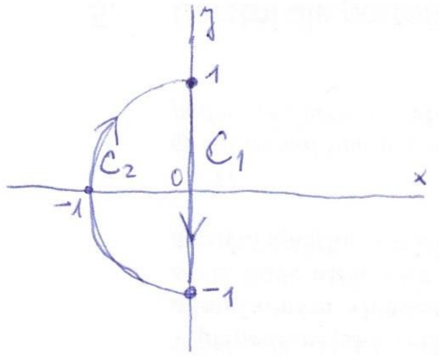
za předpokladu, že jednotlivé integrály $\int_{C_i} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ existují.

Př.: Jakou práci vykoná síla $\vec{f}$ po křivce C?

$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = ?$, kde $C = C_1 \cup C_2$, C_1 = úsečka mezi $[0,1]$ a $B=[0,-1]$

C_2 = půlkružnice $x^2+y^2=1$, $x \leq 0$ a $A=[0,-1]$

, $\vec{f} = (y, -x)$.



Parametrizace:

C_1:

$x = 0$

$y = 1-2t$, $t \in \langle 0,1 \rangle$, souhlasné orient.

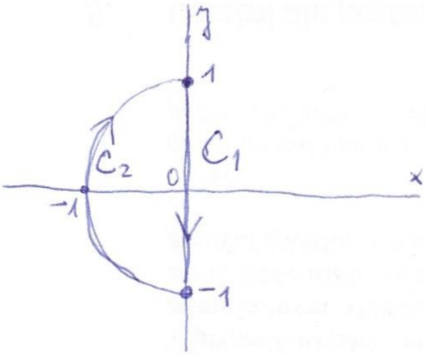
Př.: Jakou práci vykoná síla $\vec{f}$ po křivce C?

$\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = ?$, kde $C = C_1 \cup C_2$, C_1 = úsečka mezi $[0,1]$ a $B=[0,-1]$

C_2 = půlkružnice $x^2+y^2=1$, $x \leq 0$

a $A=[0,-1]$

, $\vec{f}=(y,-x)$.



Parametrizace:

C_1:

$x = 0$

$y = 1-2t$, $t \in \langle 0,1 \rangle$, souhlasné orient.

$\dot{P}_1(t) = (0,-2)$ $\quad \|\dot{P}_1\| = \sqrt{4} = 2.$

$\vec{\tau}_1 = \frac{\dot{P}_1(t)}{2}$

C_2:

$x = 1\cdot \cos t$

$y = 1\cdot \sin t$, $t \in \langle \frac{\pi}{2}, 3\pi/2 \rangle$, $P_2(\pi/2) = [0,1] = B$

$\Downarrow$

nesouhlasné orient.

$\dot{P}_2(t) = (-\sin t, \cos t)$ $\quad \|\dot{P}_2(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$

$\vec{\tau}_2 = -\frac{\dot{P}_2(t)}{1} = -(-\sin t, \cos t) = (\sin t, -\cos t)$, Dále

$$\underbrace{\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s}}_{} = \underbrace{\int_{C_1} \vec{f}\cdot d\vec{s}}_{I_1} + \underbrace{\int_{C_2} \vec{f}\cdot d\vec{s}}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_{C_1} (y,-x)\cdot d\vec{s} = \int_0^1 (1-2t,\ 0)\cdot (0,-2)\,dt \overset{!}{=} \int_0^1 0+0\,dt = \underline{\underline{0}}$$

$$\int_a^b \mathbf{f}(P(t))\cdot \dot{P}(t)\,dt.$$

Dále

$$\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_{C_1} \vec{f}\cdot d\vec{s}}_{I_1} + \underbrace{\int_{C_2} \vec{f}\cdot d\vec{s}}_{I_2}$$

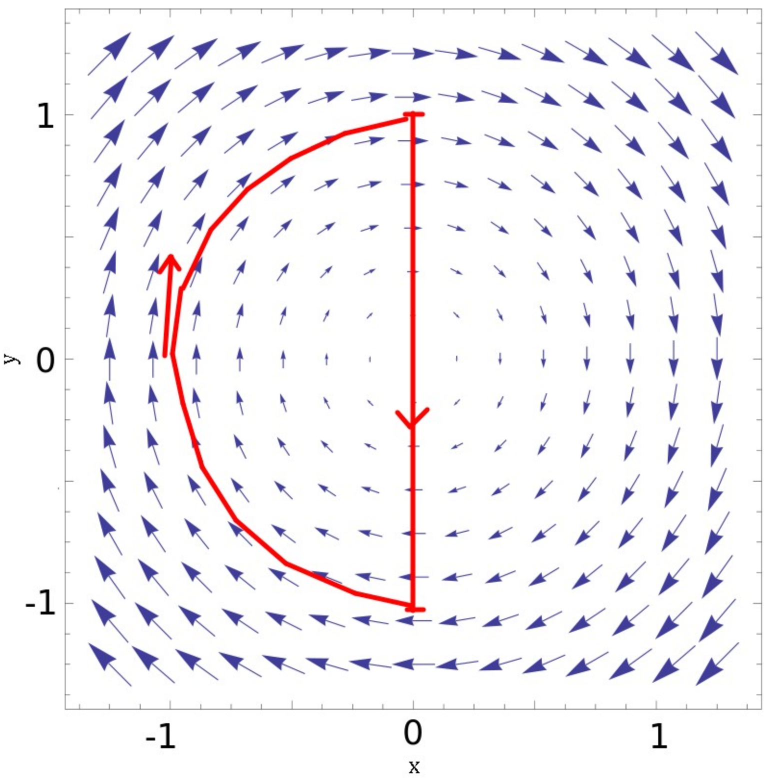
$$I_1 = \int_{C_1} (y,-x)\cdot d\vec{s} = \int_0^1 (1-2t,\ 0)\cdot (0,-2)\,dt \overset{!}{=} \int_0^1 0+0\,dt = \underline{\underline{0}}$$

$$I_2 = \int_{C_2} (y,-x)\cdot d\vec{s} = \int_a^b \mathbf{f}(P(t))\cdot \dot{P}(t)\,dt. = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1}\,dt = \left[t\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \underline{\underline{\pi}}$$

$$= \ominus\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\sin t, -\cos t)\cdot \underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{\dot{P}_2(t)}\,dt =$$

orientace

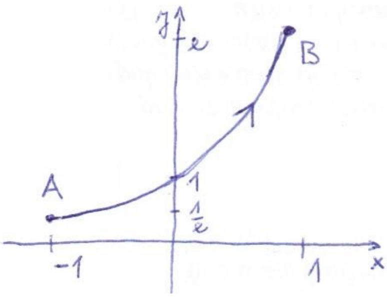
$$\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = I_1 + I_2 = 0 + \pi = \underline{\underline{\pi}}$$ Výsledná práce je π [jednotek].



Př.:

Spočítejte $\int\limits_C dx + \frac{1}{y}\ln y \, dy$, kde C je dána $y = e^x$, $|x| \leq 1$ a počátek má $x = -1$.

Řj. $\vec{f} = \left(1, \frac{1}{y}\ln y\right) \rightarrow y \neq 0 \wedge y > 0 \Rightarrow D_f = \{[x,y] \in E^2 \mid y > 0\}$.



P(t):

$$x = t, \quad y = e^t \qquad t \in \langle -1, 1 \rangle, \quad P(-1) = [-1, \tfrac{1}{e}] = A$$

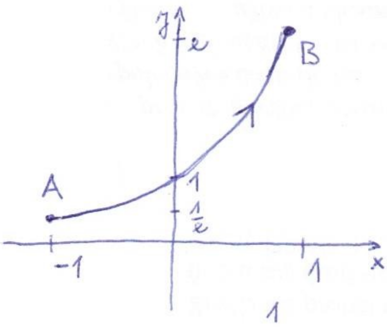
$\Downarrow$ souhlasné orient.

$$\dot{P}(t) = (1, e^t).$$

Př.:

Vypočítejte $\int_C dx + \frac{1}{y}\ln y \, dy$, kde C je dána $y = e^x$, $|x| \le 1$ a počátek má $x = -1$.

Ř.: $\vec{f} = \left(1, \frac{1}{y}\ln y\right) \rightarrow y \neq 0 \wedge y > 0 \Rightarrow D_f = \{[x,y] \in E^2 \mid y > 0\}$.



P(t):

$x = t$

$y = e^t$

$t \in \langle -1, 1 \rangle$, $P(-1) = [-1, \frac{1}{e}] = A$

souhlasné orient.

$\dot{P}(t) = (1, e^t)$.

$$I = +\int_{-1}^{1} \left(1, \frac{1}{e^t}\ln e^t\right) \cdot (1, e^t)\, dt = \int_{-1}^{1} 1 + \underbrace{\ln e^t}_{t}\, dt = \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{2}}$$

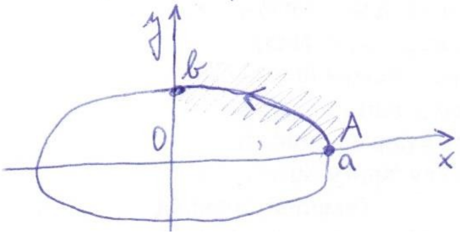
$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(P(t)) \cdot \dot{P}(t)\, dt.$$

Př.:

Jakou energii spotřebuje působením síly $\vec{f}$ po dráze dané křivkou C?

$$\int_C (-y, x) \cdot d\vec{s} = ?\ , \quad C \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ , \ x \geq 0\ , \ y \geq 0\ , \ A = [a, 0].$$

→ elipsa o poloosách a, b



P(t):

$$x = a\cos t$$
$$y = b\sin t\ , \qquad t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$$

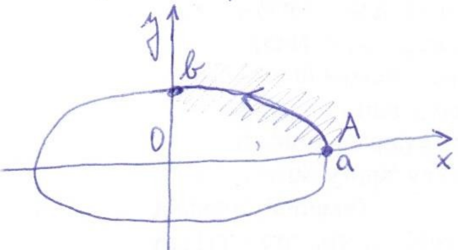
ověřím:

Př.:

Jakou energii spotřebuje působením síly $\vec{f}$ po dráze dané křivkou C?

$$\int_C (-y, x)\cdot d\vec{s} = ?\,, \quad C \equiv \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ A=[a,0].$$

→ elipsa o poloosách a, b



P(t):

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t,\quad t\in\langle 0, \pi/2\rangle$$

ověřím:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2 t}{a^2}+\frac{b^2\sin^2 t}{b^2} = \cos^2 t+\sin^2 t = 1 \checkmark$$

$x = a\cos t \geq 0$ → ano, cos je $\langle 0, \pi/2\rangle$ nezáporný

$y = b\sin t \geq 0$ → ano, sin je $\langle 0, \pi/2\rangle$ —〃— ✓

$P(0) = [a\cdot 1, 0] = A$ → interval $\langle 0, \pi/2\rangle$ je zobrazen na části elipsy s p.b. A a k.b. B

$P(\pi/2) = [0, b\cdot 1] = B$

↳ souhlasná orient.

$$\dot{P}(t) = (a(-\sin t), b\cos t)$$

$$I = +\int_0^{\pi/2} (-b\sin t, a\cos t)\cdot(-a\sin t, b\cos t)\,dt = \int_0^{\pi/2} ab(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt = \frac{ab\pi}{2}$$

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(P(t))\cdot \dot{P}(t)\,dt.$$