Matematika II – přednáška 18

Co bude dneska?

Křivkový integrál vektorové funkce po uzavřené křivce.

Greenova věta.

Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska18.pdf$
(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

Křivkový integrál vektorové funkce (2.druhu).

Výpočet, vlastnosti, použití.

Křivkový integrál skalární funkce (KI 1.druhu) - opakování

Definice (křivkový integrál skalární funkce na jednoduché hladké křivce). Nechť C je jednoduchá hladká křivka v $\mathbb{E}_2$ nebo v $\mathbb{E}_3$ a P je její parametrizace, definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť f je funkce, která je definovaná a omezená na křivce C. Existuje-li Riemannův integrál $\int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\|\, dt$, pak o funkci f říkáme, že je *integrovatelná* na křivce C. *Křivkový integrál* skalární funkce f na křivce C pak označujeme $\int_C f\, ds$ a definujeme jej rovnicí

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\|\, dt.$$

Říkáme, že "funkce f je integrovatelná na křivce C" či, že "křivkový integrál funkce f na C existuje".

Křivkový integrál vektorové funkce (KI 2.druhu) - opakování

Definice (křivkový integrál vektorové funkce). Nechť C je jednoduchá po částech hladká křivka v $\mathbb{E}_k$ (kde $k = 2$ nebo $k = 3$) a $\mathbf{f}$ je vektorová funkce, která je definovaná a omezená na křivce C. Říkáme, že vektorová funkce $\mathbf{f}$ je *integrovatelná* na křivce C, je-li skalární funkce $\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}$ integrovatelná na C. Integrál $\int_C \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}\, ds$ nazýváme *křivkovým integrálem* vektorové funkce $\mathbf{f}$ na křivce C a označujeme jej kratším způsobem $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$.

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(P(t)) \cdot \dot{P}(t)\, dt.$$

Závisí na orientaci křivky.

Cirkulace vektorového pole po uzavřené křivce

Definice (Cirkulace vektorového pole po uzavřené křivce.). Nechť C je uzavřená křivka v $\mathbb{E}_2$ nebo v $\mathbb{E}_3$ a nechť $\mathbf{f}$ je vektorové pole (= vektorová funkce), definované na C. Křivkový integrál $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ nazýváme *cirkulací* vektorového pole $\mathbf{f}$ po křivce C. Abychom zdůraznili skutečnost, že C je uzavřená křivka, používáme místo $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ často označení

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

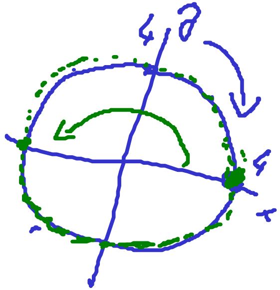
Příklad na tabuli.

Př.: $\vec{f} = (y, -x)$, $u = y$, $V(x,y) = -x$

$C: x^2+y^2=16$, která je zápomě orientována

⇒ po směru hod. ručiček

$$I = \oint_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = \oint_C u\,dx + V\,dy = ?$$



b) Počítám pomocí parametrizace

$$P(t):\quad x = \cancel{4}\cos\cancel{t},\quad y = \cancel{4}\sin\cancel{t} \quad \Big| \quad t\in\langle 0,2\pi\rangle$$

orientace $P(t)$ je nesouhl.

$$\dot{P}(t):\quad \dot{x} = -4\sin t,\quad \dot{y} = 4\cos t$$

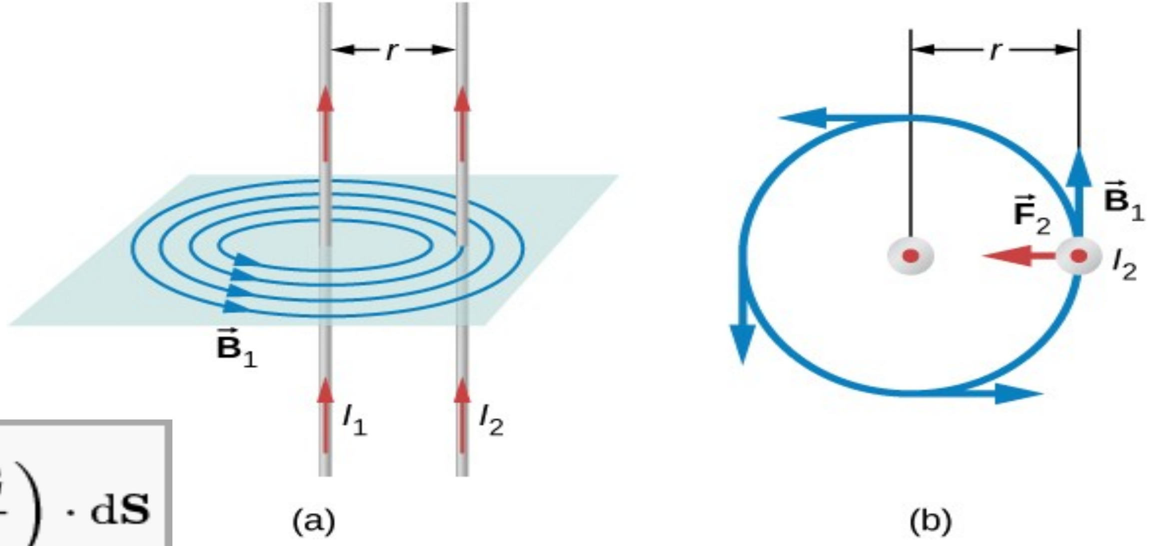
$$I = -\int_a^b \vec{f}(P(t))\cdot\dot{P}(t)\,dt = -\int_0^{2\pi}(4\sin t, -4\cos t)\cdot(-4\sin t, 4\cos t)\,dt$$

$$= -\int_0^{2\pi}(\underbrace{-16\sin^2 t - 16\cos^2 t}_{-16(1)})\,dt = +\int_0^{2\pi} 16\cdot 1\,dt = 16\,[t]_0^{2\pi} = 16\cdot 2\pi = 32\pi$$

Motivace: Amperův zákon

- Říká, že proud vytváří magnetické pole a naopak
- Použití = přitažlivá/odpudivá síla dvou vodičů
- Pravidlo pravé ruky

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \; I_{\mathrm{celk}}$$

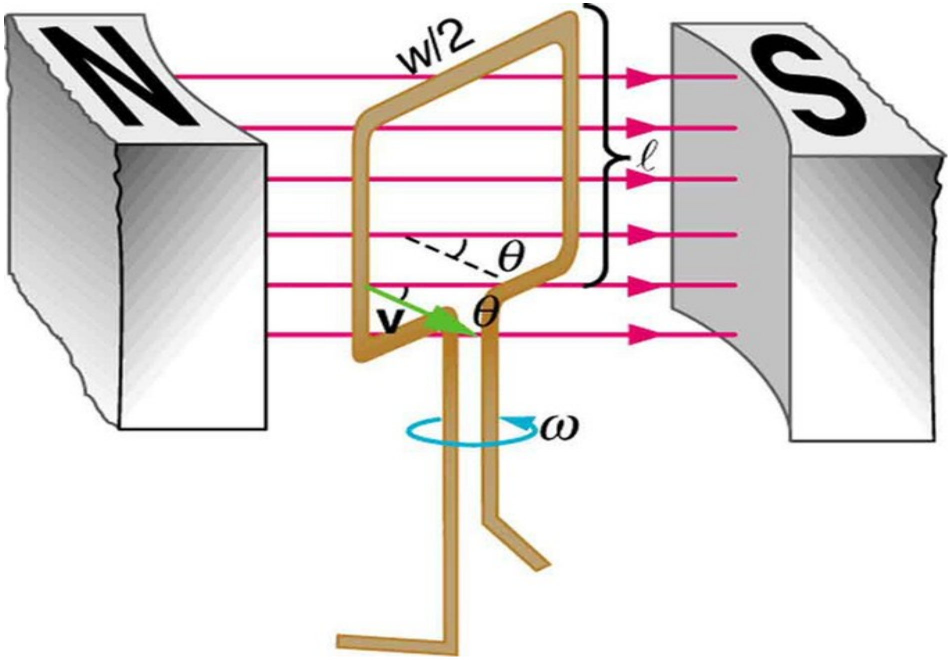


$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \left(\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Faradayův zákon

- *Zákon elektromagnetické indukce*, pojednává o vzniku elektrického napětí v uzavřeném obvodu

$$\mathcal{E}_{\mathrm{F}}(t) = \oint_{C} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_{S} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

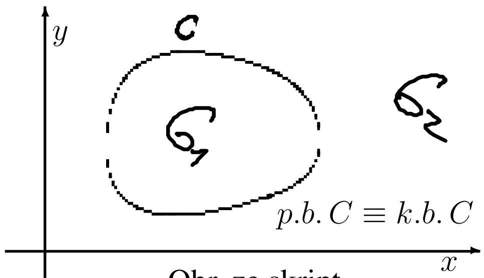


Jordanova věta

Věta (Jordanova věta.). *Nechť C je uzavřená křivka v $\mathbb{E}_2$. Pak v $\mathbb{E}_2$ existují dvě disjunktní oblasti G_1 a G_2 takové, že C je jejich společnou hranicí a*

a) $\mathbb{E}_2 = G_1 \cup C \cup G_2$ a

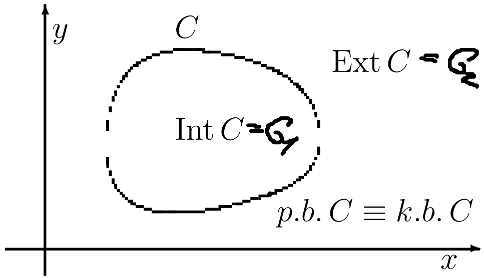
b) jedna z oblastí G_1, G_2 je omezená a druhá je neomezená.



Obr. ze skript

Vnitřek a vnějšek uzavřené křivky v $\mathbb{E}_2$

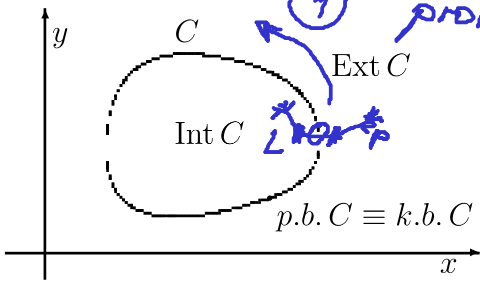
Definice (Vnitřek a vnějšek uzavřené křivky v $\mathbb{E}_2$). Nechť C je uzavřená křivka v $\mathbb{E}_2$ a G_1, G_2 jsou oblasti, jejichž existence je dána Jordanovou větou. Tu z oblastí G_1, G_2, která je omezená, nazýváme *vnitřek* křivky C a značíme $\operatorname{Int} C$. Druhou z oblastí G_1, G_2, která je neomezená, nazýváme *vnějšek* křivky C a značíme ji $\operatorname{Ext} C$.



Obr. ze skript

Kladná a záporná orientace uzavřené křivky v $\mathbb{E}_2$

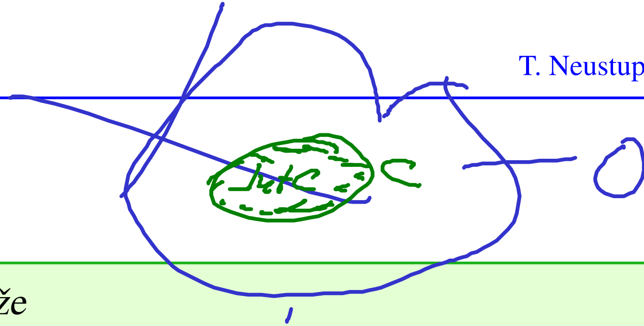
Definice (Kladná a záporná orientace uzavřené křivky v $\mathbb{E}_2$). Nechť C je uzavřená křivka v $\mathbb{E}_2$. Říkáme, že křivka C je orientována *kladně*, jestliže při oběhu po C ve směru její orientace máme vnitřek křivky C po levé ruce. (Viz obr.) V opačném případě říkáme, že křivka C je orientována *záporně*.



Obr. ze skript

+ proti směru hodinových ručiček

− po směru hod. ručiček



Greenova věta

Věta (Greenova věta). *Předpokládejme, že*

a) $\mathbf{f} = (U, V)$ *je vektorová funkce v oblasti* $O \subset \mathbb{E}_2$ *a souřadnicové funkce* U, V *mají v* O *spojité parciální derivace,*

b) C *je kladně orientovaná uzavřená křivka v* O *taková, že* $\mathrm{Int}\, C \subset O$.

Pak platí:

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\mathrm{Int}\, C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

křivkový int. $\longleftrightarrow$ plošný integrál (dvojný)

Greenova věta

Věta (Greenova věta). *Předpokládejme, že*

a) $\mathbf{f} = (U, V)$ *je vektorová funkce v oblasti* $O \subset \mathbb{E}_2$ *a souřadnicové funkce* U, V *mají v* O *spojité parciální derivace,*

b) C *je kladně orientovaná uzavřená křivka v* O *taková, že* $\mathrm{Int}\, C \subset O$.

Pak platí:

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\mathrm{Int}\, C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Poznámka: Pomocí rovnosti $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = U\, dx + V\, dy$ můžeme formuli zapsat ve tvaru

$$\oint_C (U\, dx + V\, dy) = \iint_{\mathrm{Int}\, C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Greenova věta

Věta (Greenova věta). *Předpokládejme, že*

a) $\mathbf{f} = (U, V)$ *je vektorová funkce v oblasti* $O \subset \mathbb{E}_2$ *a souřadnicové funkce* U, V *mají v* O *spojité parciální derivace,*

b) C *je kladně orientovaná uzavřená křivka v* O *taková, že* $\mathrm{Int}\, C \subset O$.

Pak platí:

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\mathrm{Int}\, C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Poznámka: Jsou-li předpoklady Greenovy věty splněny až na to, že křivka C je záporně orientovaná, platí vzorce se znaménkem “−” před integrály na pravých stranách.

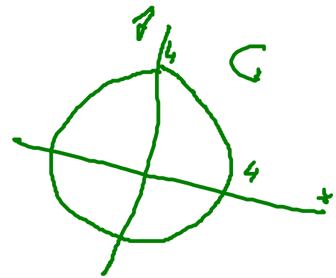
a) $I = ?$ pomocí Greenovy V.: alternativni vypocet predchoziho prikladu

$\vec{f} = (U, V)$ $\quad U = y$, $V = -x$ | $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ $\quad \frac{\partial U}{\partial y} = 1$ $\quad \frac{\partial V}{\partial x} = -1$ $\quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ $\mapsto$ PD jsou spoj. v E_2

C je uzavřená křivka (s $\oplus$ orient.) zde je krivka orientovana zaporne

$\hookrightarrow$ Lze použít Green. V.

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\iint_{Int\, C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dx\,dy =$$



$$= -\iint_{\{x^2+y^2 \le 16\}} \underbrace{(-1-1)}_{-2}\,dx\,dy = 2\iint_{\{\text{kruh o } r=4\}} 1\,dx\,dy =$$

$$= 2 \cdot \pi\, 4^2 = \underline{\underline{32\pi}}$$

Př.: $\vec{f} = \left(-\frac{1}{x^2}, 2x\right)$

kladně orient.

$C_1: x^2+y^2=1$

$C_2: x^2-2x+y^2=0$ $\quad (x-1)^2+y^2=1$

$C_3: (x-2)^2+y^2=1$

$$\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = ?$$

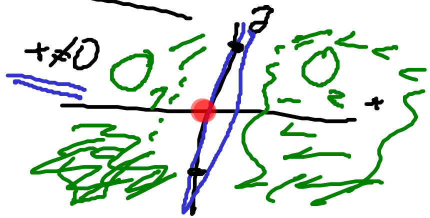
Lze použít GV? Když ano, tak použijte.

$U(x,y) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$

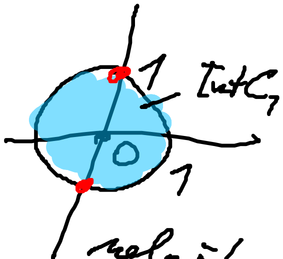
$V(x,y) = 2x$

$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2}{x^3}$ $\qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial V}{\partial x} = 2$ $\qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0$



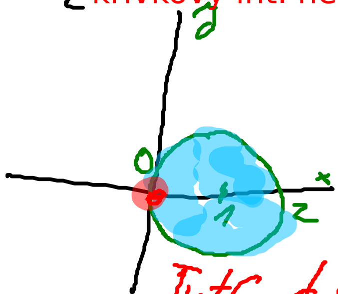
C_1 krivkovy int. neex.!



neleží v O_1 ani v O_2

NELZE použít GV

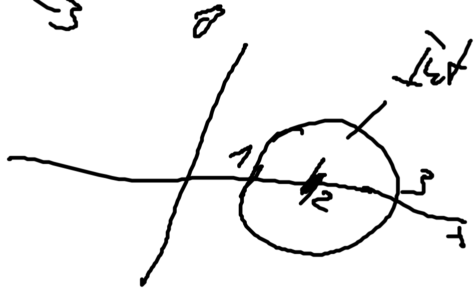
C_2 krivkovy int. neex.



$\mathrm{Int}\, C_2 \not\subset O_2$

NELZE

C_3



$\mathrm{Int}\, C_3 \subset O_2$

LZE

Ad C_3:

$$\oint_{C_3} \vec{f} \cdot d\vec{s} = + \iint_{\text{Int}\, C_3} (2-0)\, dx\, dy = 2 \boxed{\iint_{\text{Int}\, C_3} 1 \, dx\, dy} =$$

[illegible]

$$= 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = \underline{\underline{2\pi}}$$