Matematika II – přednáška 19

Co bude dneska?

Nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na integrační cestě.

Jak to souvisí s cirkulací po uzavřené křivce.

Potenciální pole - definice, podmínky ... .

Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska19.pdf$
(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

Křivkový integrál vektorové funkce (2.druhu) po uzavřené křivce (Cirkulace).

Vnitřek a vnějšek uzavřené křivky.

Greenova věta.

Greenova věta - opakování

Věta (Greenova věta). *Předpokládejme, že*

a) $\mathbf{f} = (U, V)$ *je vektorová funkce v oblasti* $O \subset \mathbb{E}_2$ *a souřadnicové funkce* U, V *mají v* O *spojité parciální derivace,*

b) C *je kladně orientovaná uzavřená křivka v* O *taková, že* $\mathrm{Int}\, C \subset O$.

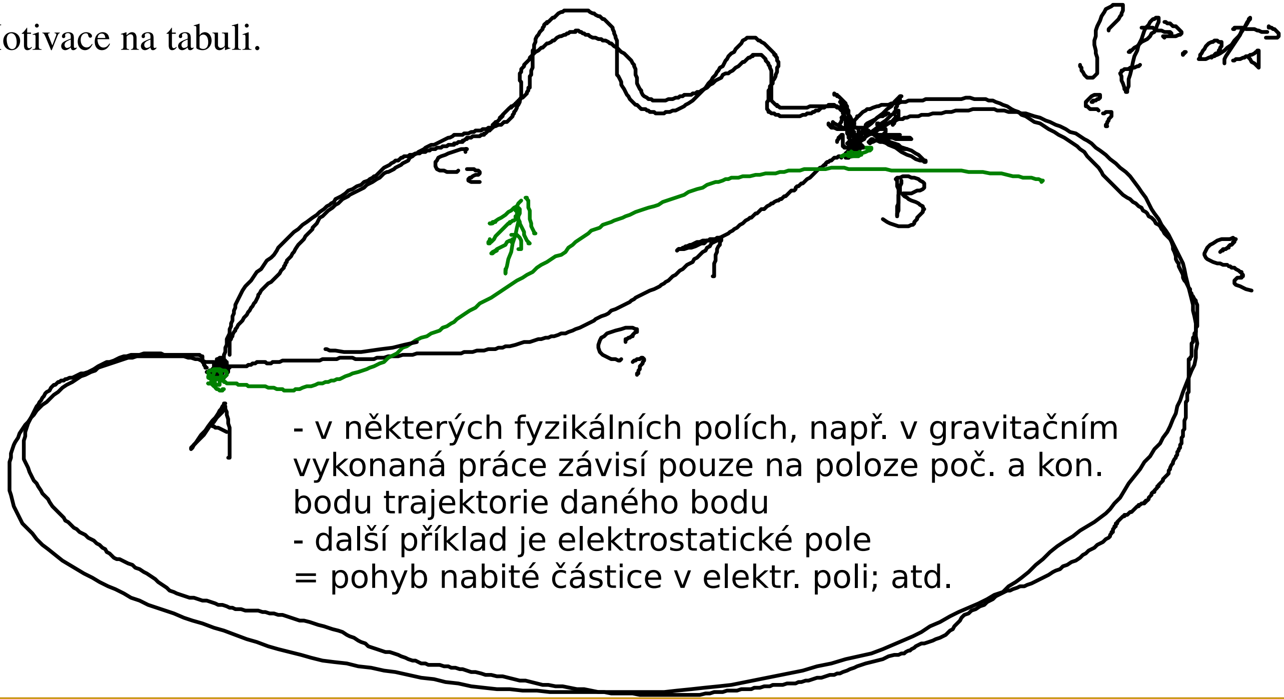
Pak platí:

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\mathrm{Int}\, C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Jsou-li předpoklady Greenovy věty splněny až na to, že křivka C je záporně orientovaná, platí vzorce se znaménkem “$-$” před integrály na pravých stranách.

Nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na integrační cestě

Motivace na tabuli.



- v některých fyzikálních polích, např. v gravitačním vykonaná práce závisí pouze na poloze poč. a kon. bodu trajektorie daného bodu
- další příklad je elektrostatické pole = pohyb nabité částice v elektr. poli; atd.

Nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na integrační cestě

Motivace na tabuli.

Definice (Nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na integrační cestě.). Nechť $\mathbf{f}$ je k–rozměrné vektorové pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$). Jestliže pro libovolné dvě křivky K_1 a K_2 v D, které mají shodný počáteční i koncový bod (tj. $p.b.\ K_1 = p.b.\ K_2$ a $k.b.\ K_1 = k.b.\ K_2$), platí rovnost

$$\int_{K_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{K_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s},$$

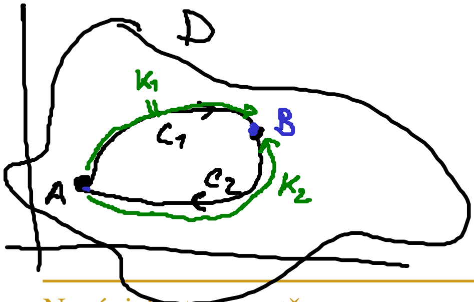
pak říkáme, že *křivkový integrál vektorové funkce* $\mathbf{f}$ *nezávisí v* D *na cestě*.

Věta. *Křivkový integrál vektorové funkce $\vec{\mathbf{f}}$ nezávisí v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ (kde $k = 2$ nebo $k = 3$) na cestě právě tehdy, když cirkulace $\vec{\mathbf{f}}$ po libovolné uzavřené křivce C v D je nulová.* $\iff$

Náznak důkazu na tabuli.

$\Rightarrow$: Předpokládáme, že $\vec{f}$ nezávisí na cestě.
Cíl je ukázat $\oint \vec{f} = 0$.

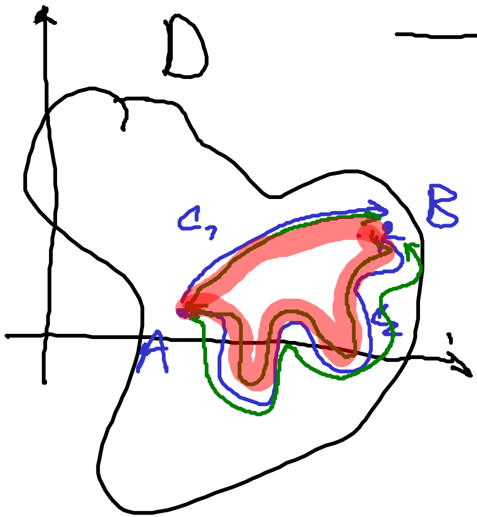
$$C = C_1 \cup C_2 \quad \rightarrow \quad I = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = ? = 0 \ \checkmark$$



$$I = \underbrace{\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s}}_{\int_{K_1} \vec{f} \cdot d\vec{s}} + \underbrace{\int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}}_{-\int_{K_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}} = 0$$

$\int_{K_1} = \int_{K_2}$ ($\vec{f}$ nezávisí na int. cestě)

Ex: Předpoklad: $\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0$ Cíl: $\int_{C_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{f}\cdot d\vec{s}$ $\forall$ k. C_1 = $\forall$ k. C_2 -//-



$$\int_{C_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = ?$$

$$= \underbrace{\int_{C_1} + \int_{-C_2}} + \int_{C_2} \vec{f}\cdot d\vec{s} =$$

$$= \underbrace{\oint_{C_1 \cup -C_2} \vec{f}\cdot d\vec{s}}_{=0} + \int_{C_2} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

Potenciální vektorové pole

$f \; \cdots \; \varphi$

Definice (Potenciální vektorové pole.). Vektorové pole $\mathbf{f}$ v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$) nazýváme *potenciální pole* v D, jestliže existuje skalární pole (= skalární funkce) φ v D takové, že

$$\mathbf{f} = \operatorname{grad} \varphi$$

v D. Skalární funkci φ nazýváme *potenciál* vektorového pole $\mathbf{f}$ v D.

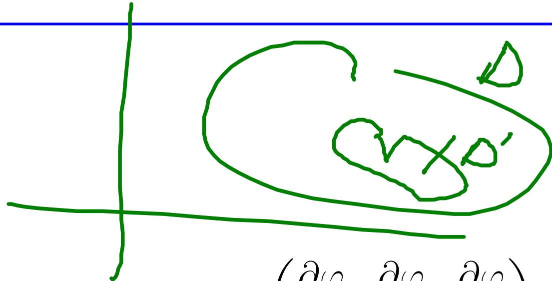
Potenciální vektorové pole

Definice (Potenciální vektorové pole.). Vektorové pole $\mathbf{f}$ v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$) nazýváme *potenciální pole* v D, jestliže existuje skalární pole (= skalární funkce) φ v D takové, že

$$\mathbf{f} = \operatorname{grad} \varphi$$

v D. Skalární funkci φ nazýváme *potenciál* vektorového pole $\mathbf{f}$ v D.

Nyní se omezíme na potenciální pole v $\mathbb{E}_2$, na konci semestru se též podíváme na $\mathbb{E}_3$.



Potenciální vektorové pole

Platí

$$\operatorname{grad} \varphi^{(x,y)} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \quad (\text{pro k} = 2), \qquad \operatorname{grad} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (\text{pro k} = 3).$$

$$\parallel$$

$$\vec{f} := (U, V)$$

Je-li **f** potenciální pole v oblasti D a $D' \subset D$, pak **f** je potenciální pole i v oblasti D'.

Potenciální vektorové pole

Platí

$$\mathrm{grad}\ \varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{y}}\right) \ (\mathrm{pro\ k} = 2), \qquad \mathrm{grad}\ \varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{z}}\right) \ (\mathrm{pro\ k} = 3).$$

Věta. *Je-li* $\mathbf{f}$ *potenciální pole v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_k$*, pak jeho potenciál* φ *je určen jednoznačně až na aditivní konstantu.*

To znamená, že:

a) $\varphi + c$ *(kde* c *je libovolná reálná konstanta) je také potenciál* $\mathbf{f}$ *v* D*.*

b) *Jakýkoliv jiný potenciál* ζ *pole* $\mathbf{f}$ *v* D *se liší od* φ *nejvýše o aditivní konstantu.* Jinými slovy: *je-li* ζ *také potenciál* $\mathbf{f}$ *v* D*, pak existuje konstanta* c *taková, že* $\zeta = \varphi + c$ *v* D*.*

Dk věty stručně na tabuli.

a) φ , $\varphi(x,y,z)+C$

$\operatorname{grad}(\varphi(x,y,z)+C)=\operatorname{grad}\varphi=\vec{f}$

$\vec{f}=\operatorname{grad}\varphi$

b) φ, ξ jsou potenciály $\vec{f}$ v D:

$\left.\begin{array}{l}\vec{f}=\operatorname{grad}\varphi\\ \vec{f}=\operatorname{grad}\xi\end{array}\right\}\ \vec{O}=\operatorname{grad}(\varphi-\xi)$ v D $\Rightarrow\ \varphi=C+\xi$

$\varphi(B) - \varphi(A)$

Potenciální vektorové pole

Věta. *Je-li* **f** *potenciální a spojité vektorové pole v oblasti* D, φ *je potenciál* **f** *v* D *a* C *je křivka v* D, *pak*

$\Rightarrow \quad \varphi(B) - \varphi(A)$

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} = \underbrace{\varphi(k.b.\,C)}\; - \varphi(p.b.\,C).$$

$\varphi(x(b), y(b)) - \varphi(x(a), y(a))$

$= \int_a^b \frac{d}{dt}\varphi(x(t), y(t))\,dt$

Jak zjistit, zda je vektorové pole potenciální? Na tabuli.

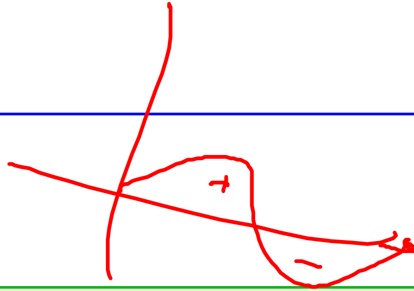
Dk:

$\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_C \operatorname{grad}\varphi \cdot d\vec{s} \overset{\text{param.}}{=} \int_a^b \underbrace{\operatorname{grad}\varphi\,(P(t))\cdot \dot{P}(t)}\,dt =$

$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \cdot \dot{P}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\dot{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\dot{y}$

$= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy(t)}{dt}$

$= \frac{d}{dt}\varphi(x(t), y(t))$



$$\int_0^{2\pi} \sin t \, dt = 0$$

Potenciální vektorové pole

Věta. *Je-li* $\mathbf{f}$ *potenciální a spojité vektorové pole v oblasti* D, φ *je potenciál* $\mathbf{f}$ *v* D *a* C *je křivka v* D, *pak*

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \varphi(k.b.\,C) - \varphi(p.b.\,C).$$

Použití GV

Jak zjistit, zda je vektorové pole potenciální? Na tabuli.

$\vec{f}$ je potenciální, spojité v D

C je uzavřená křivka

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 \iff \text{práce } \vec{f} \text{ nezávisí na cestě}$$

$\vec{f}$ je potenciální

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

viz věta V.1.6.

myšlenka věty opravo

$$0 = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{Int\, C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dxdy$$

NENÍ jednoduše souvislá

„syr ementál“

JE = „oblast bez děr“

Potenciální pole - opakování

př. V.1.6

Věta. f *je potenciální vektorové pole v oblasti* D $\Leftrightarrow$ *Křivkový integrál vektorové funkce* f *nezávisí v* D *na integrační cestě.*

Věta (Potenciální pole v $\mathbb{E}_2$ – postačující podmínka.). *Nechť*

a) D je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_2$ a

b) $\mathbf{f} = (U, V)$ je vektorové pole v D, jehož souřadnicové funkce U a V mají v D spojité parciální derivace a splňují podmínku:

NUTNÁ PODMÍNKA

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{v } D.$$

Pak f *je potenciální pole v* D.