# Matematika II – přednáška 22

## Co bude dneska?

Různé konkrétní parametrizace ploch (začali jsme minule).

Plošný integrál skalární funkce (plošný integrál 1. druhu)

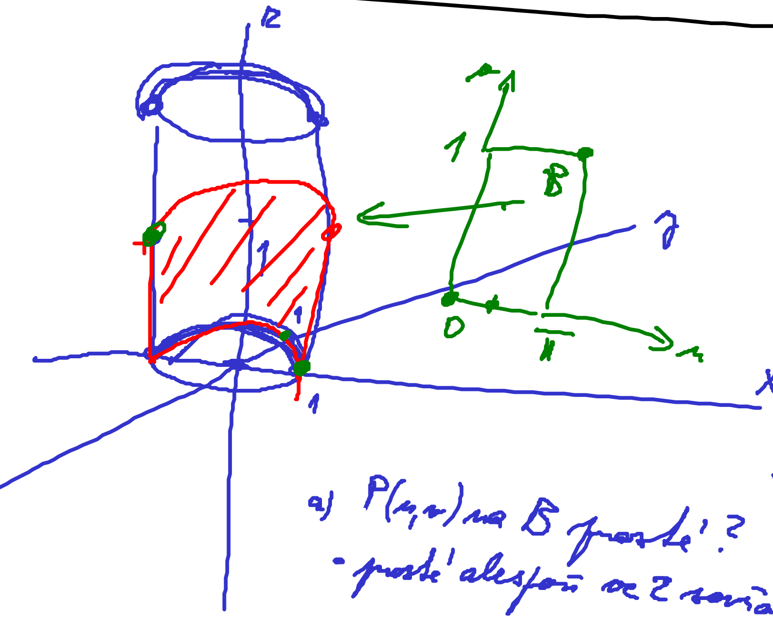
Obsah plochy, mechanické charakteristiky plochy.

Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska22.pdf$
(pro osobní potřeby).

**Př.:** $P(u,v) = [\underset{x(u,v)}{\cos u}, \underset{y}{\sin u}, \underset{z}{v}]$, $B = \{u \in \langle 0,\pi\rangle, v \in \langle 0,1\rangle\}$

Ověřte, že $P(u,v)$ je parametrizace plochy $G$: $x^2+y^2=1$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq 1$




1) Splňuje $P(u,v)$ r-ce $G$?

$x^2+y^2=1$

$P(u,v)$: $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$

$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ ✓

$y = \sin u \geq 0$? ✓

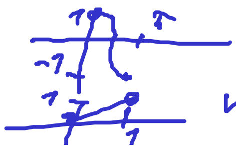
$0 \leq z = v \leq 1$? ✓

a) $P(u,v)$ na $B$ prosté?

- prosté alespoň ve 2 souřadnicích

$y = \cos u$ na $\langle 0,\pi\rangle$

$z = v$ na $\langle 0,1\rangle$




✓

($x = \sin u$ není prosté)

b) $P_u, P_v$ spojité PD + omezené

$$P_u = (-\sin u, \cos u, 0)$$
$$P_v = (0, 0, 1)$$

jsou spoj. na $B$

$B$ je uzavřená $\Rightarrow$ PD omezené

c) $P_u \times P_v \neq \vec{0}$ v $B$

$$P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} \\ -\sin u \\ 0 \end{matrix} = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$\|P_u \times P_v\| = \sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u + 0} = 1 \neq 0$$

$$P_u \times P_v = \vec{0} \Leftrightarrow \|P_u \times P_v\| = 0$$

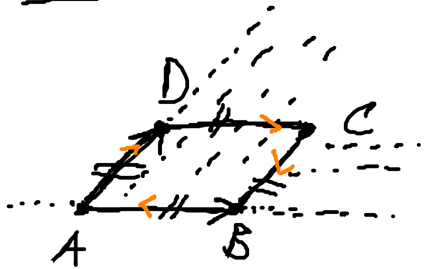
Př.: Rovnoběžník ABCD;

$$\begin{matrix} A = \\ B = \\ C = \\ D = \end{matrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• orientovaná $\vec{n}$, který míří vzhůru $\Leftrightarrow$ $n_3 = \oplus$

$P(u,v) = ?$

---



$$\underbrace{X = A + u\cdot(B-A) + v\,(D-A)}$$

$$P(u,v):\quad \begin{aligned} x &= a_1 + u\cdot 1 + v\cdot 0 \\ y &= a_2 + u\cdot 0 + v\cdot 1 \\ z &= a_3 + u\cdot 0 + v\cdot 1 \end{aligned}$$

$= [u, v, v]$ ; $B = ?$ $\quad u \in \langle 0,1\rangle$, $v \in \langle 0,1\rangle$

$B-A = (1,0,0)$

$D-A = (0,1,1)$

$P(u=1, v=1) = [1,1,1] = C$ ✓

$$\begin{aligned} P_u &= (1,0,0)\ 1 \\ P_v &= (0,1,1)\ 0 \end{aligned} \Rightarrow P_u \times P_v = (0, -1, 1)$$ má také 3. složku $\oplus$, $\Rightarrow$ souhl. orientovaná

## Př.:

$$2x+y+z-4=0$$

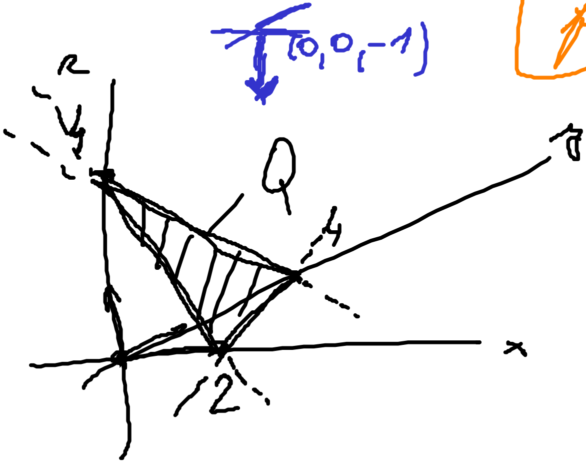
$$\Updownarrow$$

$$Q=\{[x,y,z]\in E_3 \mid \underline{z=4-2x-y},\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$$

$P(u,v)=?$ $\qquad z=z(x,y)$

• $\vec{n}$ svírá s vektorem $(0,0,-1)$ ostrý úhel

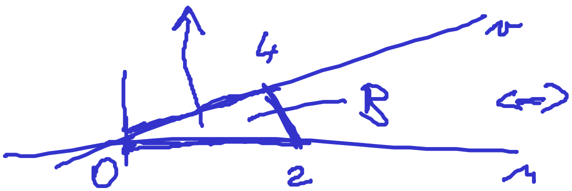
$(0,0,-1)$



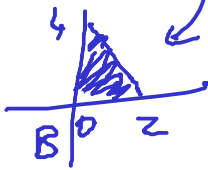

protože skalární součin $\vec{n}\cdot(0,0,-1)<0$ svírají tupý úhel $\Rightarrow P(u,v)$ je nesouhl. orient.

$P(u,v)$: $x=u$, $y=v$, $z=4-2u-v$

$B=$




$\Longleftrightarrow$




$$P_u\times P_v=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=(2,1,1)$$

$(2,1,1)$

$\|$

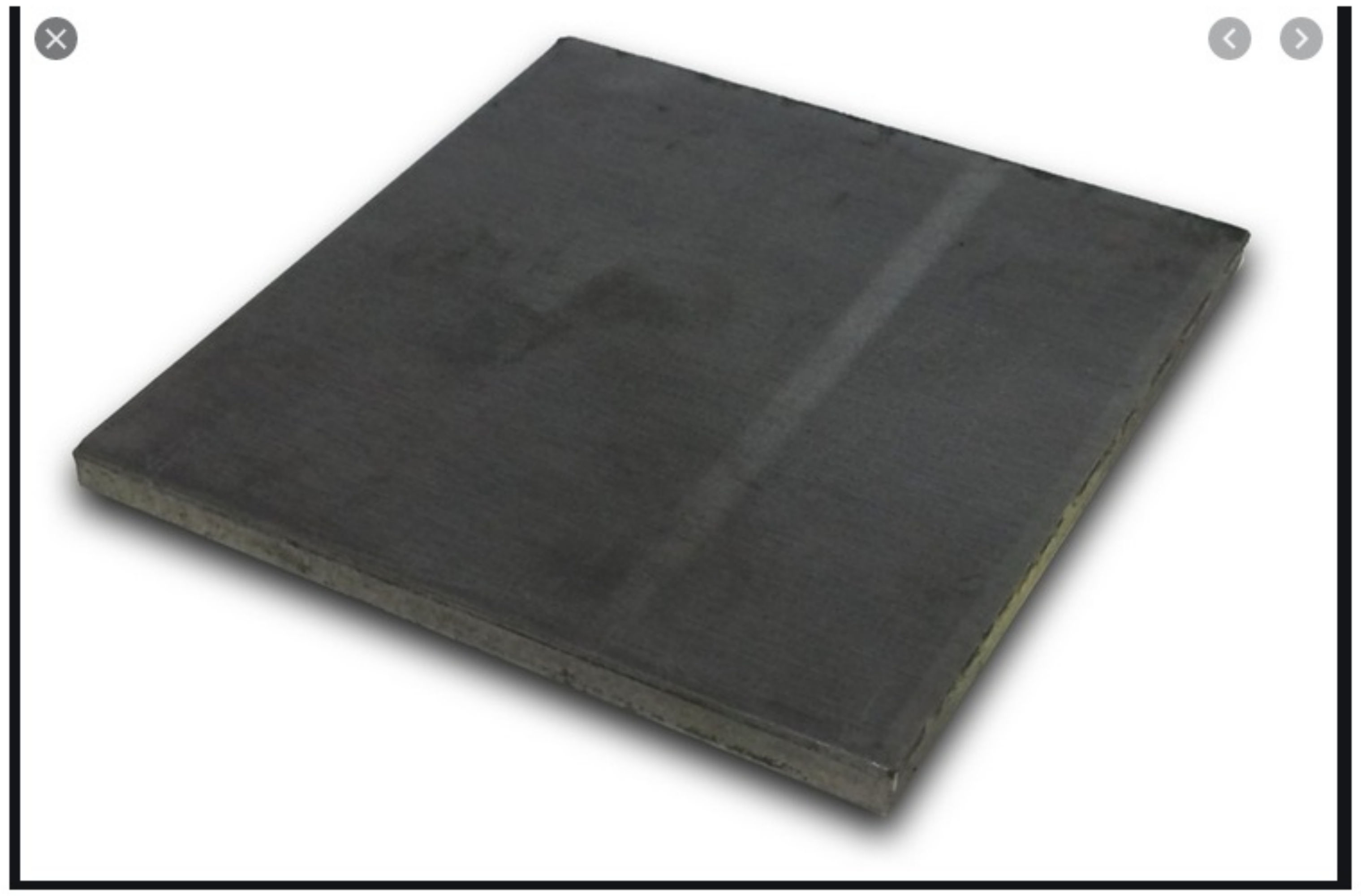
$(P_u\times P_v)\cdot(0,0,-1)=\underline{-1}=\|(2,1,1)\|\cdot\|(0,0,-1)\|\cos\vartheta$

## Shrnutí co bylo minule

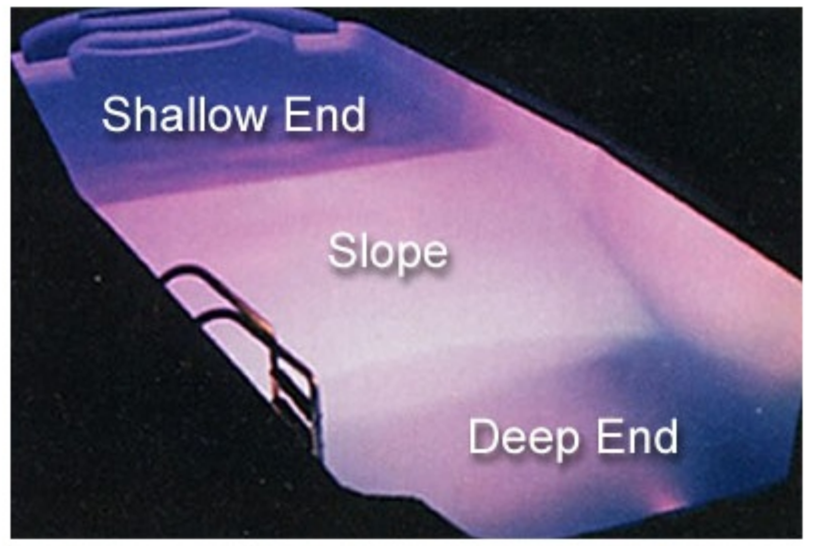
Jednoduchá hladká plocha.

Parametrizace plochy.

Jednoduchá po částech hladká plocha. Uzavřená plocha.



Jaka je plocha platu ocele? -> 2D integral




**Give It A Try For Yourself !**

Length = X Width = X Average Depth = X Gallon Multiplier =

Click To Calculate

The Approximate Gallons Of Water In Your Pool Is =

Jak spocist prumernou hloubku bazenu -> 2D intergal

Ale jak spocist povrch trupu lodi?

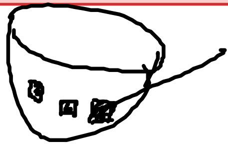

A jak spocist treba prumernou hloubku Tyrhenskeho more?

--> Plosny integral

skalarni funkce

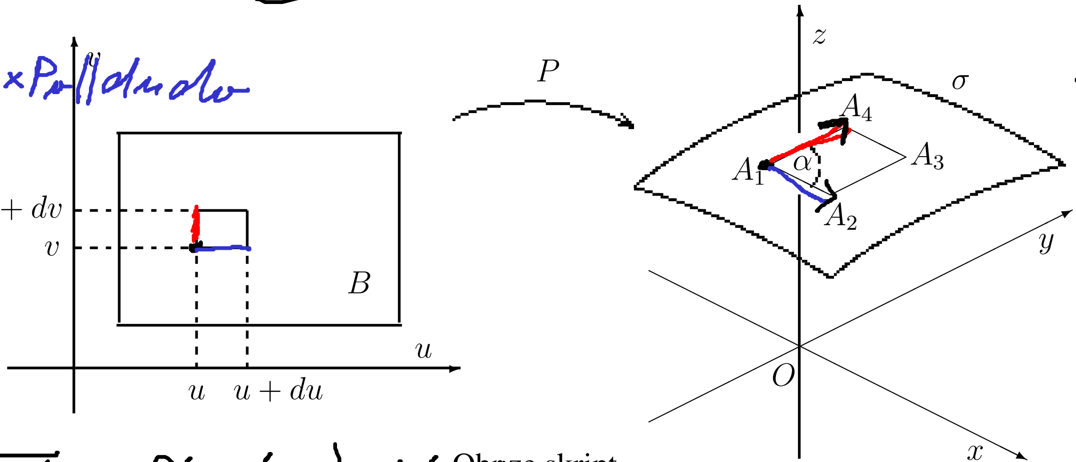
## Plošný integrál skalární funkce (plošný integrál 1. druhu) - motivace

Na tabuli.



$$\iint f\,dp = \lim_{n\to\infty} \sum^{n} f(x)\, dS$$

$$dS = \| P_u \times P_v \|\, du\, dv$$




Obrze skript

$$\overline{A_2 - A_1} = P(u+du, v) - P(u,v) = P(u,v) + P_u(u,v)\cdot du - P(u,v) = P_u(u,v)\cdot du$$

$$\overline{A_4 - A_1} = \text{stejně} = P_v(u,v)\cdot dv$$

## Plošný integrál skalární funkce (plošný integrál 1. druhu) - definice

**Definice (Plošný integrál skalární funkce na jednoduché hladké ploše.).** Nechť $\sigma$ je jednoduchá hladká plocha v $\mathbb{E}_3$ a $P$ je její parametrizace, definovaná na množině $B \subset \mathbb{E}_2$. Nechť $f$ je funkce, která je definovaná a omezená na ploše $\sigma$. Existuje-li dvojný integrál $\iint_B f(P(u,v))\, \|P_u(u,v) \times P_v(u,v)\|\, du\, dv$, pak o funkci $f$ říkáme, že je *integrovatelná* na ploše $\sigma$. *Plošný integrál* funkce $f$ na ploše $\sigma$ pak označujeme $\iint_\sigma f\ dp$ a definujeme jej rovnicí

$$\iint_\sigma f\ dp = \iint_B f(P(u,v))\, \|P_u(u.v) \times P_v(u,v)\|\, du\, dv.$$

## Plošný integrál skalární funkce (plošný integrál 1. druhu) - definice

**Definice (Plošný integrál skalární funkce na jednoduché hladké ploše.).** Nechť $\sigma$ je jednoduchá hladká plocha v $\mathbb{E}_3$ a $P$ je její parametrizace, definovaná na množině $B \subset \mathbb{E}_2$. Nechť $f$ je funkce, která je definovaná a omezená na ploše $\sigma$. Existuje-li dvojný integrál $\iint_B f(P(u,v))\, \|P_u(u,v) \times P_v(u,v)\|\, du\, dv$, pak o funkci $f$ říkáme, že je *integrovatelná* na ploše $\sigma$. *Plošný integrál* funkce $f$ na ploše $\sigma$ pak označujeme $\iint_\sigma f\ dp$ a definujeme jej rovnicí

$$\iint_\sigma f\ dp = \iint_B f(P(u,v))\, \|P_u(u.v) \times P_v(u,v)\|\, du\, dv.$$

Výpočet integrálu vpravo ukážeme na příkladech.

Pozn.: Výroky "funkce $f$ je integrovatelná na ploše $\sigma$" a "plošný integrál $f$ na $\sigma$ existuje" mají stejný význam (jsou ekvivalentní).

Pozn.: Pro označení plošného integrálu též často objevuje $dS$ nebo $d\sigma$ místo $dp$.

Poznámka: Plošný integrál skalární funkce je nezávislý na volbě parametrizace.

## Plošný integrál skalární funkce na jednoduché po částech hladké ploše

**Definice (Plošný integrál skalární funkce na jednoduché po částech hladké ploše.).** Nechť $\sigma$ je jednoduchá po částech hladká plocha v $\mathbb{E}_3$, která je složena z jednoduchých hladkých ploch $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ dle pravidel, popsaných dříve. Nechť $f$ je funkce, která je omezená na ploše $\sigma$. Je-li $f$ integrovatelná funkce na každé z ploch $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, pak říkáme, že je *integrovatelná* na ploše $\sigma$. *Plošný integrál* funkce $f$ na ploše $\sigma$ pak definujeme rovnicí

$$\iint_\sigma f\ dp = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\sigma_i} f\ dp.$$

(Plošné integrály na pravé straně jsou plošnými integrály na jednoduchých hladkých plochách.

Pozn.: Místo "plošný integrál skalární funkce" často používáme název *plošný integrál 1. druhu*.

Chceme-li zdůraznit, na kterých proměnných závisí funkce $f$, můžeme místo $\iint_\sigma f \ dp$ psát $\int_\sigma f(x,y,z) \, dp$.

Pozn.: Místo "plošný integrál skalární funkce" často používáme název *plošný integrál 1. druhu*.

Chceme-li zdůraznit, na kterých proměnných závisí funkce $f$, můžeme místo $\iint_\sigma f \ dp$ psát $\int_\sigma f(x,y,z)\, dp$.

## Plošný integrál skalární funkce na jednoduché po částech hladké ploše

**Definice (Obsah plochy.).** Je-li $\sigma$ jednoduchá po částech hladká plocha, pak číslo, které je hodnotou integrálu $\iint_\sigma dp$, nazýváme *obsahem* plochy $\sigma$.

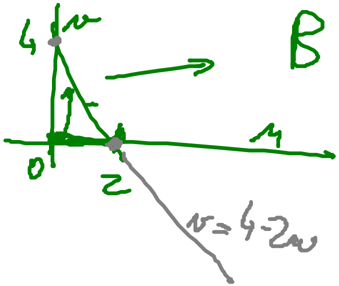
V případě, kdy $\sigma$ je jednoduchá hladká plocha a $P$ je její parametrizace definovaná v množině $B \subset \mathbb{E}_2$, je obsah plochy $\sigma$ roven

$$p(\sigma) = \iint_\sigma dp = \iint_B \|P_u(u,v) \times P_v(u,v)\| \, du \, dv.$$

## S plochy = ?

$$\iint_Q 1\,dp = \iint_B 1\cdot \|P_u \times P_v\|\,du\,dv = \iint_B \sqrt{6}\,du\,dv$$

$$\|P_u \times P_v\| = \|(2,1,1)\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$




$B \Rightarrow$ $u \in \langle 0, 2\rangle$

$0 \le v \le 4 - 2u$

$$\int_0^2 \left( \int_0^{4-2u} \sqrt{6}\,dv \right) du = \sqrt{6} \int_0^2 \left( [v]_0^{4-2u}\,du \right) = \sqrt{6}\cdot\left[4u - u^2\right]_0^2 = \sqrt{6}\cdot(8-4) = 4\cdot\sqrt{6}$$

## Plošný integrál skalární funkce - vlastnosti

Je odvozený od dvojného integrálu, tj. také vlastnosti jsou odvozeny od dvojného integrálu.

a) **Postačující podmínka pro existenci plošného integrálu skalární funkce.** Je-li $f$ spojitá funkce na ploše $\sigma$, pak je na $\sigma$ integrovatelná (tj. plošný integrál $\iint_\sigma f \ dp$ existuje).

## Plošný integrál skalární funkce - vlastnosti

b) **Linearita plošného integrálu.** Jsou-li funkce $f$ a $g$ integrovatelné na ploše $\sigma$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak funkce $f+g$ a $\alpha f$ jsou také integrovatelné na $\sigma$ a

$$\iint_\sigma (f+g)\, dp = \iint_\sigma f\, dp + \iint_\sigma g\, dp,$$

$$\iint_\sigma \alpha \cdot f\, dp = \alpha \cdot \iint_\sigma f\, dp.$$

c) Je-li $f$ integrovatelná funkce na ploše $\sigma$ a omezená funkce $g$ se liší od $f$ na $\sigma$ nejvýše v konečně mnoha bodech nebo křivkách, pak $g$ je také integrovatelná funkce na $\sigma$ a

$$\iint_\sigma g\, dp = \iint_\sigma f\, dp.$$

## Plošný integrál skalární funkce - vlastnosti

d) Je-li funkce $f$ integrovatelná na ploše $\sigma$, pak je také integrovatelná na $-\sigma$ a

$$\iint_{-\sigma} f \ dp = \iint_{\sigma} f \ dp.$$

## Plošný integrál skalární funkce - vlastnosti

d) Je-li funkce $f$ integrovatelná na ploše $\sigma$, pak je také integrovatelná na $-\sigma$ a

$$\iint_{-\sigma} f\ dp = \iint_{\sigma} f\ dp.$$

Pozn.: Tvrzení a) lze zobecnit: *Je-li $\sigma$ jednoduchá po částech hladká plocha a funkce $f$ je spojitá na každé z hladkých částí plochy $\sigma$, pak $f$ je integrovatelná na $\sigma$.*

*Pozn.: Tvrzení d) ukazuje, že existence ani hodnota plošného integrálu skalární funkce nezávisí na orientaci plochy.*

## Výpočet plošného integrálu skalární funkce

*Plošný integrál funkce $f$ na jednoduché hladké ploše $\sigma$ můžeme vypočítat užitím parametrizace $P = [\phi, \psi, \vartheta]$ plochy $\sigma$ a příslušné formule z definice.*

*1) Do funkce $f$ za proměnné $x$, $y$, $z$ dosadíme*

$$x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \vartheta(u, v),$$

*2) za $dp$ dosadíme*

$$dp = \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| \, du \, dv$$

*3) integrujeme podle $u$ a $v$ na množině $B \subset \mathbb{E}_2$, na které je parametrizace $P$ definovaná.*

## Výpočet plošného integrálu skalární funkce

*Plošný integrál funkce $f$ na jednoduché hladké ploše $\sigma$ můžeme vypočítat užitím parametrizace $P = [\phi, \psi, \vartheta]$ plochy $\sigma$ a příslušné formule z definice.*

*1) Do funkce $f$ za proměnné $x$, $y$, $z$ dosadíme*

$$x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \vartheta(u, v),$$

*2) za $dp$ dosadíme*

$$dp = \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| \, du \, dv$$

*3) integrujeme podle $u$ a $v$ na množině $B \subset \mathbb{E}_2$, na které je parametrizace $P$ definovaná.*

*Plošný integrál funkce $f$ na jednoduché po částech hladké ploše, složené z jednoduchých hladkých ploch $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, vypočítáme tak, že nejprve vypočítáme integrály na plochách $\sigma_1 \dots, \sigma_n$ a výsledky pak sečteme.*

*Příklady na tabuli.*

## Fyzikální aplikace plošného integrálu skalární funkce

*Na tabuli - ze skript.*

## Znalost ploch a jejich parametrizace

I { 1 rovina (část), 2 paraboloid, 3 pl. kuželová, 4 pl. kulová }

II { 2 paraboloid, 3 pl. kuželová, 4 pl. kulová, 5 pl. válcová }

1. rovina (část)
2. paraboloid
3. pl. kuželová
4. pl. kulová
5. pl. válcová

**Typ I:** parametrizace "Univerzální"

$x = x$
$y = y$
$z = g(x,y)$
$[x,y] \in B$

ukázat výpočtem

B je průmět plochy do roviny $z=0$

Pak $P_x \times P_y = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, \boxed{1}\right)$

kolmý vektor

**Typ II** param. pomocí cylindr. souřadnic

III pl. kulovou lze též pomocí sférických souřadnic.

**IV Plocha zadana parametrizaci**