Matematika II – přednáška 22

Co bude dneska?

Plošný integrál vektorové funkce (plošný integrál 2. druhu)

Souvislost plošného integrálu vektorové funkce a plošného integrálu skalární funkce.

Tok vektorového pole plochou.

Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{\ }neustupa/M2\_Neu\_prednaska23.pdf$
(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

Plošný integrál skalární funkce (plošný integrál 1. druhu)

Obsah plochy, mechanické charakteristiky plochy.

Plošný integrál skalární funkce (plošný integrál 1. druhu) - definice

Definice (Plošný integrál skalární funkce na jednoduché hladké ploše.). Nechť σ je jednoduchá hladká plocha v $\mathbb{E}_3$ a P je její parametrizace, definovaná na množině $B \subset \mathbb{E}_2$. Nechť f je funkce, která je definovaná a omezená na ploše σ. Existuje-li dvojný integrál $\iint_B f(P(u,v))\,\|P_u(u,v) \times P_v(u,v)\|\,du\,dv$, pak o funkci f říkáme, že je *integrovatelná* na ploše σ. *Plošný integrál* funkce f na ploše σ pak označujeme $\iint_\sigma f\ dp$ a definujeme jej rovnicí

$$\iint_\sigma f\ dp = \iint_B f(P(u,v))\,\|P_u(u.v) \times P_v(u,v)\|\,du\,dv.$$

Výpočet integrálu vpravo ukážeme na příkladech.

Pozn.: Výroky "funkce f je integrovatelná na ploše σ" a "plošný integrál f na σ existuje" mají stejný význam (jsou ekvivalentní).

Pozn.: Pro označení plošného integrálu též často objevuje dS nebo $d\sigma$ místo dp.

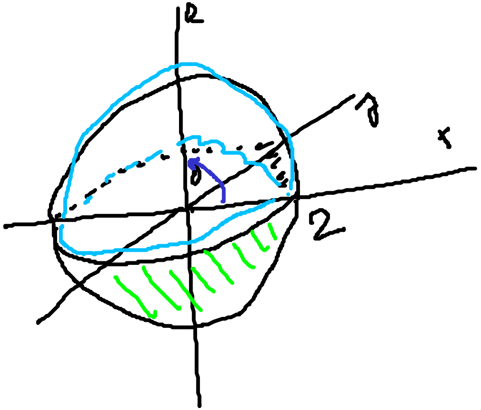
Pr.:

$\iint\limits_{\sigma} (x^2+y^2)\,dp = ?$; $\sigma = \{x^2+y^2+z^2=4\}$ .... kulová plocha

$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$

$\sigma_1 = \{X\in\sigma \mid z \geq 0\}$

$\sigma_2 = \{X\in\sigma \mid z < 0\}$



$z^2 = 4-x^2-y^2 \Rightarrow z = +\sqrt{4-x^2-y^2}$

σ_1:

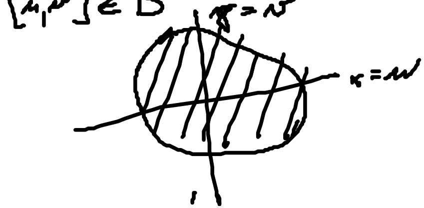
(1) $P(u,v)$:

$x = u$

$y = v$

$z = +\sqrt{4-u^2-v^2}$

$[u,v]\in B$



nevyhneme sa transf. do polárnych súradníc

(2) $P(\overset{\vartheta}{\overset{\|}{u}},\overset{\varphi}{\overset{\|}{v}})$:

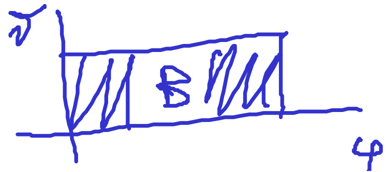
$x = 2\cos\vartheta\cos\varphi$

$y = 2\cos\vartheta\sin\varphi$

$z = 2\sin\vartheta$

B: $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$

$\vartheta \in \langle 0, \pi/2\rangle$



$$P_\vartheta = \left(2\cos\varphi\,(-\sin\vartheta),\ 2\sin\varphi\,(-\sin\vartheta),\ 2\cos\vartheta\right) \qquad -2\cos\varphi\sin\vartheta$$

$$P_\varphi = \left(2\cos\vartheta\,(-\sin\varphi),\ 2\cos\vartheta\cos\varphi,\ 0\right) \qquad -2\cos\vartheta\sin\varphi$$

$$P_\vartheta \times P_\varphi = \left(-4\cos^2\vartheta\cos\varphi,\ -4\cos^2\vartheta\sin\varphi,\ \underline{4\cos^2\varphi\,(-\sin\vartheta\cos\vartheta)} + \underline{4\sin^2\varphi\,(-\sin\vartheta\cos\vartheta)}\right)$$

$$= \left(-4\cos^2\vartheta\cos\varphi,\ -4\cos^2\vartheta\sin\varphi,\ -4\sin\vartheta\cos\vartheta\right)$$

$$\|P_\vartheta \times P_\varphi\| = \sqrt{\underbrace{16\cos^4\vartheta\cos^2\varphi + 16\cos^4\vartheta\sin^2\varphi}_{16\cos^4\vartheta\,(c^2+s^2\varphi)} + 16\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta}$$

$$= \sqrt{\underbrace{16\cos^4\vartheta + 16\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta}_{16\cos^2\vartheta\,(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta)}}$$

$$= \underline{\underline{4\cos\vartheta}}$$

$$\iint_{G_1} x^2+y^2\,dp = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \underbrace{\left((2\cos\vartheta\cos\varphi)^2+(2\cos\vartheta\sin\varphi)^2\right)}_{4\cos^2\vartheta\,(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} \cdot \underline{4\cos\vartheta}\; d\vartheta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 4\cos^2\vartheta \cdot 4\cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= 16\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2}\cos^3\vartheta\, d\vartheta = 16\cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} \underline{\cos\vartheta}(1-\sin^2\vartheta)\,\underline{d\vartheta} =$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\vartheta = t \\ \cos\vartheta\, d\vartheta = \underline{dt} \\ \pi/2 \to 1 \\ 0 \to 0 \end{array}\right] = 16\cdot 2\pi \cdot \int_0^1 (1-t^2)\,dt = 32\pi\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 32\pi \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{64\pi/3}}$$

$$\iint_G x^2+y^2\,dp = 2\iint_{G_1} x^2+y^2\,dp = \underline{128\pi/3}\ \ \text{LM}$$

Znalost ploch a jejich parametrizace

I
1. rovina (část)
2. paraboloid
3. pl. kuželová
4. pl. kulová

II
2. paraboloid
3. pl. kuželová
4. pl. kulová
5. pl. válcová

Typ I: parametrizace „Univerzální"

$$x = x$$
$$y = y$$
$$z = g(x,y)$$
$$[x,y] \in B$$

ukázat výpočtem

B je průmět plochy do roviny $z=0$

Pak $P_x \times P_y = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, \boxed{1}\right)$

kolmý vektor

Typ II param. pomocí cylindr. souřadnic

III pl. kulovou lze též pomocí sférických souřadnic.

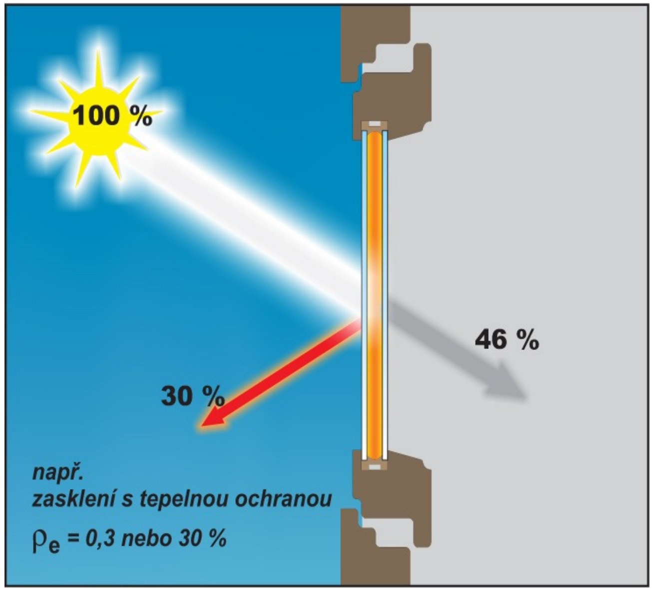
IV Plocha zadana parametrizaci

Plošný integrál vektorové funkce (plošný integrál 2. druhu) - motivace

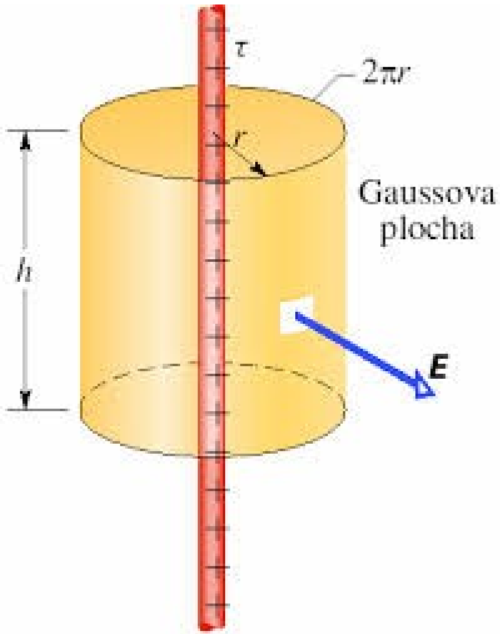
Na tabuli.

Plošný integrál z vektorové f-ce

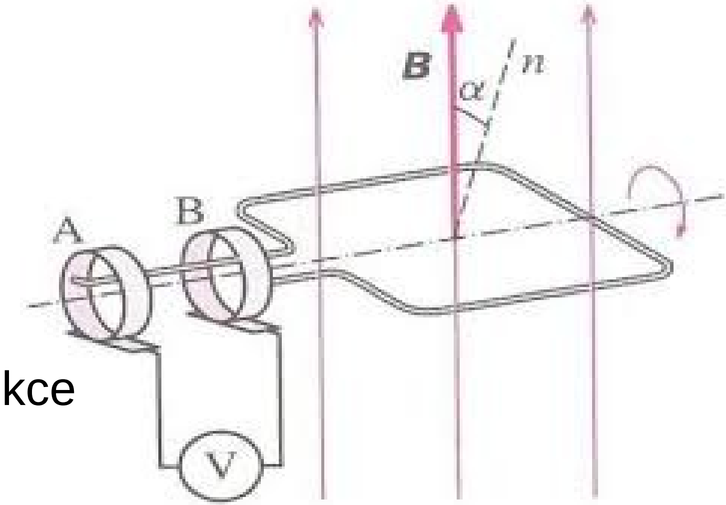
Tok vody



Tepelný tok

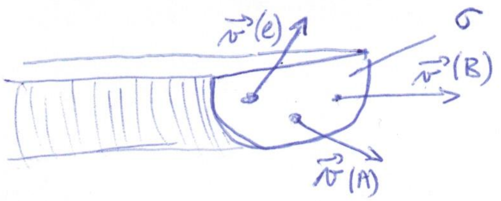


Gaussův zákon
o elektrické intenzitě

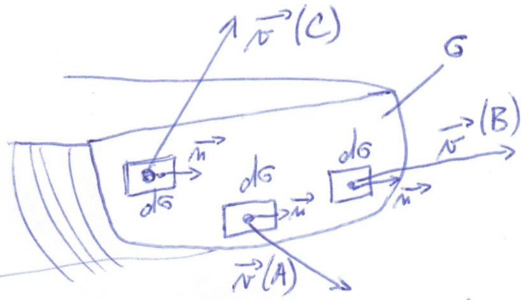


Faradayův zákon
elektromagnetické indukce

Chceme spočítat průtok vody skrz zadanou plochu.



A představme si hodně rozvířený proud vody popsaný vekt. polem rychlosti $\vec{v}$.



Pak celkový tok vody skrz plochu σ s orientací danou $\vec{n}$ spočítám vysčítáním ~~přes~~ příspěvků "malé elementy" plochy $d\sigma$.

Na elementu $d\sigma$ ale potřebuji zjistit, co teče ve směru normály (tj. ven/dovnitř dle orientace σ), tj.:

$$dQ = \vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)\,d\sigma$$

udělám průmět $\vec{v}$ do směru $\vec{n}$

(průtok označíme Q)

Celkem dostanu

jiný zápis s f-cí $\vec{f}$ místo $\vec{v}$

$$Q = \iint_\sigma dQ = \iint_\sigma \vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)\,d\sigma \left(= \iint_\sigma \vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{p} \right)$$

Plošný integrál vektorové funkce (plošný integrál 2. druhu) - definice

Definice (Plošný integrál vektorové funkce.). Nechť σ je jednoduchá po částech hladká plocha v $\mathbb{E}_3$ a $\mathbf{f}$ je vektorová funkce, která je definovaná a omezená na ploše σ. Říkáme, že vektorová funkce $\mathbf{f}$ je *integrovatelná* na ploše σ, je-li skalární funkce $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ integrovatelná na σ. Integrál $\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dp$ nazýváme *plošný integrál vektorové funkce* $\mathbf{f}$ na ploše σ a označujeme jej kratším způsobem $\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p}$.

Plošný integrál vektorové funkce (= vektorového pole) $\mathbf{f}$ vyjadřuje *tok vektorového pole* $\mathbf{f}$ uvažovanou plochou. Tento integrál se často nazývá *plošný integrál 2. druhu*.

Souvislost plošného integrálu vektorové funkce a pl. integrálu skal. funkce.

Poznámka: Z definice plošného integrálu vektorové funkce $\mathbf{f}$ je patrné, že tento integrál je vlastně plošným integrálem skalární funkce $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$, což je průmět vektorové funkce $\mathbf{f}$ do směru kolmého k ploše σ. Plošný integrál vektorové funkce lze tudíž vyjádřit formulí

$$\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \iint_\sigma (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})\, dp.$$

Souvislost plošného integrálu vektorové funkce a pl. integrálu skal. funkce.

Poznámka: Z definice plošného integrálu vektorové funkce $\mathbf{f}$ je patrné, že tento integrál je vlastně plošným integrálem skalární funkce $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$, což je průmět vektorové funkce $\mathbf{f}$ do směru kolmého k ploše σ. Plošný integrál vektorové funkce lze tudíž vyjádřit formulí

$$\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \iint_\sigma (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})\, dp.$$

Poznámka: Normálový vektor $\mathbf{n}$ nemusí existovat v těch bodech jednoduché po částech hladké plochy σ, ve kterých se stýkají jednotlivé hladké plochy, ze kterých je po částech hladká plocha σ složena. Takové body tvoří nejvýše konečně mnoho jednoduchých po částech hladkých křivek a existence ani hodnota plošného integrálu na chování integrované funkce (pokud tato je omezená) na konečně mnoha křivkách nezávisí.

Zápisy plošného integrálu

Buď $\mathbf{f} = (U, V, W)$ pak tyto integrály

Předpokládejme, že vektorová funkce $\mathbf{f}$ má souřadnicové funkce U, V a W. Pak integrály

$$\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p}, \quad \iint_\sigma \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dp, \quad \iint_\sigma (U, V, W) \cdot d\mathbf{p}, \quad \iint_\sigma (U, V, W) \cdot \mathbf{n}\, dp,$$

$$\iint_\sigma (U\mathbf{i} + V\mathbf{j} + W\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{p}, \quad \iint_\sigma (U\mathbf{i} + V\mathbf{j} + W\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, dp$$

mají stejný význam.

Plošný integrál vektorové funkce - základní vlastnosti

Protože je plošný integrál vekt. fce $\mathbf{f}$ definován jako plošný integrál skal. fce $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})$ jsou základní vlastnosti obou integrálů stejné.

S jedním zásadním rozdílem: Plošný integrál vektorové funkce závisí na orientaci plochy!

Plošný integrál vektorové funkce - základní vlastnosti

Protože je plošný integrál vekt. fce $\mathbf{f}$ definován jako plošný integrál skal. fce $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})$ jsou základní vlastnosti obou integrálů stejné.

S jedním zásadním rozdílem: Plošný integrál vektorové funkce závisí na orientaci plochy!

Věta. *Je-li vektorová funkce $\mathbf{f}$ integrovatelná na ploše σ, pak je integrovatelná i na ploše $-\sigma$ a*

$$\boxed{\iint_{-\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = -\int_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p}.}$$

Toto tvrzení vyplývá z definice. Vektor $\mathbf{n}$ v $\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \; dp$ je normálový vektor, který ukazuje směrem jímž je plocha orientována. Změna orientace vede ke změně znaménka normálového vektoru.

Memotechnická pomůcka

plošný int. ze skalární f-ce ($\iint_\sigma f\,dp$) má fyz. význam např. hmotnosti desky,
tj. nezávisí na orientaci desky

plošný int. z vektorové f-ce ($\iint_\sigma \vec{f}\cdot d\vec{p}$) má fyz. význam toku daného pole
skrz plochu, např. tok vody skrz ústí hadice
a je velký rozdíl, jestli voda vtéká nebo vytéká!

Věta:
Nechť je zadané spojité vekt. pole **f**(x,y,z) na jednoduché hladké ploše σ a nechť je P(u,v) její souhlasně orientovaná parametrizace.
Potom platí:

$$\iint_\sigma \mathbf{f}\cdot d\mathbf{p} = \iint_\sigma \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\, dp$$
$$= \iint_B \mathbf{f}(P(u,v))\cdot\frac{P_u(u,v)\times P_v(u,v)}{\|P_u(u,v)\times P_v(u,v)\|}\,\|P_u(u,v)\times P_v(u,v)\|\,du\,dv,$$

$$\text{(IV.4.2)}\qquad \iint_\sigma \mathbf{f}\cdot d\mathbf{p} = \iint_B \mathbf{f}(P(u,v))\cdot\left(P_u(u,v)\times P_v(u,v)\right)du\,dv.$$

Výpočet plošného integrálu vektorové funkce

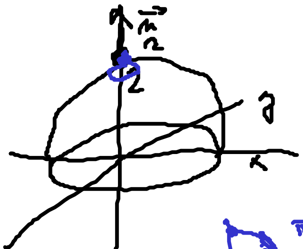
Na tabuli. Př.: $\iint_{\sigma_1} (0,0,z)\cdot\vec{n}\,d\sigma$; σ_1 = horní polovina kulové plochy orientované $\vec{n}$, že $\vec{n}[0,0,2] = [0,0,1]$.

$P(\vartheta,\varphi)$ viz předchozí př.

$$x = 2\cos\vartheta\cos\varphi \qquad \vartheta \in \langle 0, \pi/2\rangle$$
$$y = 2\cos\vartheta\sin\varphi \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$$
$$z = 2\sin\vartheta$$

$$P_\vartheta \times P_\varphi = (-4\cos^2\vartheta\cos\varphi, -4\cos^2\vartheta\sin\varphi, -4\sin\vartheta\cos\vartheta)$$

nesouhl. orientace $P(\vartheta,\varphi)$.



$$P\,(\vartheta = \pi/2,\ \varphi \text{ lib.}) = [0,0,2]$$

$$P_\vartheta \times P_\varphi\ (\vartheta = \pi/2,\ \varphi \text{ lib.}) = (0,0,0)$$ problém s def. fce

$$P_\vartheta \times P_\varphi\ (\vartheta \to \pi/2,\ \varphi \text{ lib.}) = (x, x, -)$$ ↳ povoluje konečný počet výjimek

$\vartheta = \pi/2 - \varepsilon$

$-4 \underbrace{\sin\vartheta}_{1} \underbrace{\cos\vartheta}_{\oplus} = \ominus$

PF:

$\vec{f} = (0,0,r)$

nesouhl. orientace par. s σ_1

$$\iint_{\sigma_1} (0,0,r)\cdot \vec{n}\, d\sigma = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (0,\ 0,\ 2\sin\vartheta)\cdot\left(-4\cos^2\vartheta\cos\varphi,\ -4\cos^2\vartheta\sin\varphi,\ -4\sin\vartheta\cos\vartheta\right) d\varphi\, d\vartheta$$

$$= +\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 0+0+2\sin\vartheta\cdot(+4\sin\vartheta\cos\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi =$$

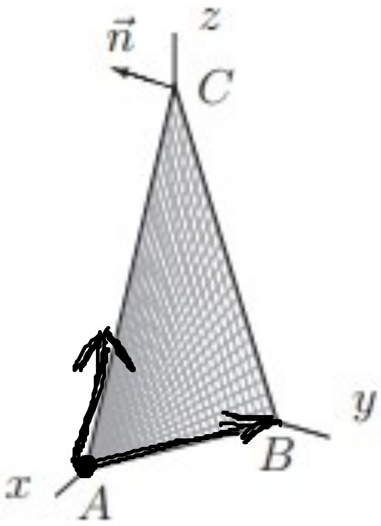
$$= 8\int_0^{2\pi} 1\, d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta = \left[\begin{array}{l} t = \sin\vartheta \\ dt = \cos\vartheta\, d\vartheta \\ \pi/2 \to 1 \\ 0 \to 0 \end{array}\right]$$

$$8\cdot 2\pi \cdot \int_0^1 t^2\, dt = 16\pi\cdot\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{16\pi}{3}$$

Určete tok Φ vektorového pole $\vec{f}$ plochou $Q \subset E_3$ orientovanou normálou $\vec{n}$:

***Příklad* 650.** $\vec{f} = (x, y - z, 2z)$, Q je trojúhelník o vrcholech A, B, C, kde
$A = [3,0,0]$, $B = [0,2,0]$, $C = [0,0,6]$, $\vec{n} \cdot \vec{i} < 0$.

Řešení : ~~Tok vypočteme tentokrát podle definice, tj. převedením na integrál skalární funkce.~~



Př.: 650 (e-Sbírka)

σ: trojúhelník s vrcholy $A = [3,0,0]$
$B = [0,2,0]$
$C = [0,0,6]$

→ parametrizace? → více variant, jedna z nich viz e-Sbírka (r-ce roviny)

→ parametrický popis roviny pomocí 2 směr. vektorů:

$\vec{s_1} = \vec{AB} = (-3, 2, 0)$
$\vec{s_2} = \vec{AC} = (-3, 0, 6)$

Pak $\boxed{P(u,v) = A + u\vec{s_1} + v\vec{s_2}}$

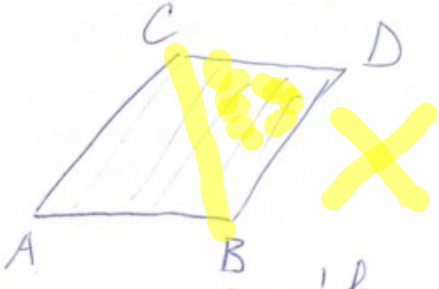
neboli po složkách:

$P(u,v)$:

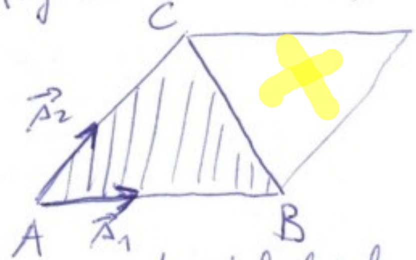
$$x = 3 + u(-3) + v(-3)$$
$$y = 0 + u \cdot 2 + 0 \cdot v$$
$$z = 0 + 0 \cdot u + 6 \cdot v$$

Množina B:

kdyby $u \in \langle 0,1\rangle$
$v \in \langle 0,1\rangle$ $\Longrightarrow$ proto $u \in \langle 0,1\rangle$
$\cancel{v \in \langle 0, 1-u\rangle}$ $0 \le v \le 1-u$
(tj. součet $u+v=1$)



rovnoběžník



trojúhelník

$$P_u = (-3, 2, 0) = \vec{s}_1$$

$$P_v = (-3, 0, 6) = \vec{s}_2$$

$$P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}(12) - \vec{j}(-18) + \vec{k}(6)$$

$$= (12, 18, 6)$$

je $\overrightarrow{P_u \times P_v} \cdot \vec{i} < 0$?

$(12, 18, 6) \cdot (1, 0, 0) = 12$ není < 0 $\Longrightarrow$ nesouhlasná orientace

$\vec{f} = (x, y-z, 2z)$

$$\iint_{G} \vec{f} \cdot d\vec{p} = -\iint_{B} \vec{f} \cdot \overrightarrow{P_u \times P_v} \, du \, dv = -\int_0^1 \int_0^{1-u} (3-3u-3v, 2u-6v, 12v) \cdot \boxed{(12, 18, 6)} \, dv \, du$$

$$= -\int_0^1 \int_0^{1-u} 36 - \cancel{36u} - 36v + \cancel{36u} - 6 \cdot 18v + 6 \cdot 12v \, dv \, du =$$

$$= -6 \int_0^1 \int_0^{1-u} 6 + v \underbrace{(-6 - 18 + 12)}_{-12} \, dv \, du$$

$$= -6 \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} 6(1-2v) \, dv \right) du =$$

$$= -36 \int_0^1 \left[v - \frac{v^2}{1} \right]_0^{1-u} du = -36 \int_0^1 (1-u) - (1+u^2-2u) \, du =$$

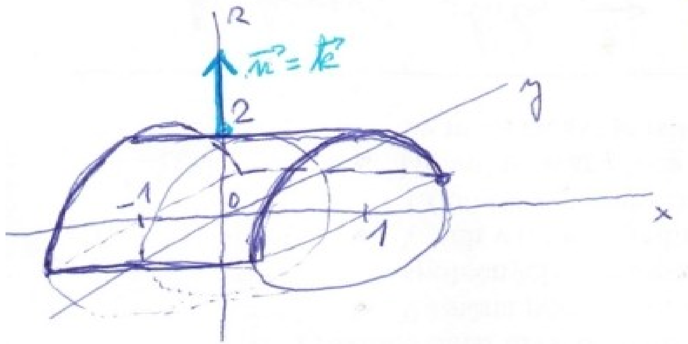
$$= -36 \int_0^1 -u^2 + u \, du = -36 \left[-\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} \right]_0^1 = -36 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{-6}}$$

Tok je -6 (jednotek).

IV.4.8. Příklad. Vypočítejme tok vektorového pole $\mathbf{f}(x, y, z) = yz\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ plochou σ, která je částí poloviny válcové plochy $y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, odříznutou rovinami $x = -1$ a $x = 1$. Plocha σ je orientovaná normálovým vektorem $\mathbf{n}$, který má v bodě $[0, 0, 2]$ tvar $\mathbf{n} = \mathbf{k}$.

σ: $y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, $-1 \leq x \leq 1$ → část válcové plochy

parametrizace (podobná polárním souřadnicím s pevným poloměrem)



$P(u,v)$:

$x = u$ → $u \in \langle -1, 1 \rangle$

$y = 2\cos v$

$z = 2\sin v$ → $v \in \langle 0, \pi \rangle$

→ $z = 2\sin v \geq 0$

$$P_u = (1, 0, 0)$$
$$P_v = (0, -2\sin v, 2\cos v)$$

$$P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sin v & 2\cos v \end{vmatrix} = \vec{i}(0) - \vec{j}(2\cos v) + \vec{k}(-2\sin v) =$$
$$= \underline{(0, -2\cos v, -2\sin v)}.$$

Bodu $A = [0,0,2]$ odpovídají hodnoty parametrů u, v:

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= 0 = u \checkmark \\
y &= 0 = 2\cos v \\
z &= 2 = 2\sin v
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow v = \pi/2 \checkmark
$$

Pak

$$
\begin{aligned}
P_u \times P_v \,(u = 0,\ v = \pi/2) &= \left(0,\ -2\cos \pi/2,\ -2\sin \pi/2\right) \\
&= (0,\ 0,\ -2)
\end{aligned}
$$

tedy $P_u \times P_v$ je v bodě A opačně orientovaný než žádaný $\vec{n} = (0, 0, 1)$,

proto je orientace param. nesouhlasná.

vektorového pole $\mathbf{f}(x, y, z) = yz\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$

$$\iint_\sigma \vec{f} \cdot d\vec{p} = \iint_\sigma (0, yz, z^2) \cdot d\vec{p} = -\iint_B \vec{f}(P(u,v)) \cdot \overrightarrow{P_u \times P_v}\, du\, dv =$$

$$= -\int_{-1}^{1}\int_0^{\pi} (0, 2\cos v \cdot 2\sin v, 4\sin^2 v) \cdot (0, -2\cos v, -2\sin v)\, du\, dv =$$

$$= -\int_{-1}^{1}\int_0^{\pi} -8\cos^2 v \sin v - 8\sin^3 v\, du\, dv =$$

$$= +8\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\pi} \sin v(\cos^2 v + \sin^2 v)\, dv\right) du =$$

$$= +8\int_{-1}^{1} [-\cos v]_0^{\pi}\, du = 8\left[\underbrace{(1+1)}_{2} \cdot \cancel{v}\, u\right]_{-1}^{1} = \underline{\underline{32}}$$

Tok vekt. pole zadanou plochou je roven $+32$ [jednotek].

Určete tok Φ vektorového pole $\vec{f}$ plochou $Q \subset E_3$ orientovanou normálou $\vec{n}$:

***Příklad* 653.** $\vec{f} = (-y, x, z)$, $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 ;\ z = 4 - \sqrt{x^2+y^2},\ 1 \le z \le 3\}$,
normálový vektor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ má $n_3 > 0$.

Př.: 653 (e-Sbírka)

G: $1 \le z \le 3$, $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2} \to (z-4) = -\sqrt{x^2+y^2} \rightsquigarrow (z-4)^2 - x^2 - y^2 = 0$

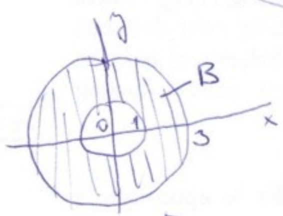
kuželová plocha

$1 \le 4 - \sqrt{x^2+y^2} \le 3$

$-3 \le -\sqrt{} \le -1$

$3 \ge \sqrt{x^2+y^2} \ge 1$

$\Rightarrow$ lze přes $P(u,v)$: $x = u$, $y = v$, $z = 4 - \sqrt{u^2+v^2}$ $\quad B =$



nebo lépe rovnou $P(r,\varphi)$: (abych lépe popsal B pomocí polárních souřadnic)

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = 4 - \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = 4 - r$

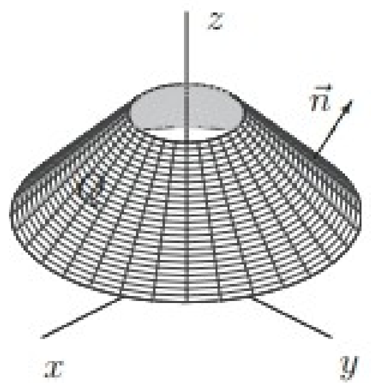
$r \in \langle 1, 3\rangle$

$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$

Pak

$P_r = \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 4-r) = (\cos\varphi, \sin\varphi, -1)$

$P_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi}(\text{— " —}) = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)$



Pak

$$P_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 4-r\right) = \left(\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ -1\right)$$

$$P_\varphi = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\text{——}\ \|\ \text{——}\right) = \left(-r\sin\varphi,\ r\cos\varphi,\ 0\right)$$

$$P_r \times P_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & -1 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(+r\cos\varphi\right) - \vec{j}\left(-r\sin\varphi\right) + \vec{k}\left(r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi\right)$$

$$= \underline{\left(+r\cos\varphi,\ +r\sin\varphi,\ r\right)}$$

Má $P_r \times P_\varphi$ třetí složku kladnou?

Ano, ve všech bodech plochy je $r > 0$.

↳ souhlasná orientace $P(r,\varphi)$.

$\vec{f} = (-y, x, z)$,

$$\iint_{\sigma} \vec{f} \cdot d\vec{p} = + \iint_{B} \vec{f} \cdot \overrightarrow{P_r \times P_\varphi}\, dp =$$

$$= + \int_1^3 \int_0^{2\pi} (\overset{-y}{-r\sin\varphi}, \overset{x}{r\cos\varphi}, \overset{z}{4-r}) \cdot (+r\cos\varphi, +r\sin\varphi, r)\, d\varphi\, dr$$

$$= \int_1^3 \int_0^{2\pi} \cancel{-r^2 \sin\varphi\cos\varphi} + \cancel{r^2\cos\varphi\sin\varphi} + 4r - r^2 \, d\varphi\, dr =$$

$$= 2\pi \int_1^3 4r - r^2\, dr = 2\pi \left[4\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_1^3 = 2\pi \left(2\cdot 9 - 9 - \left(2 - \frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$= 2\pi \left(7 + \frac{1}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{44\pi}{3}}}$$