Matematika II – přednáška 24

Co bude dneska?

Gaussova (Gaussova-Ostrogradského) věta.

Potenciální pole v E_3.

Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska24.pdf$
(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

Plošný integrál skalární funkce (plošný integrál 2. druhu)

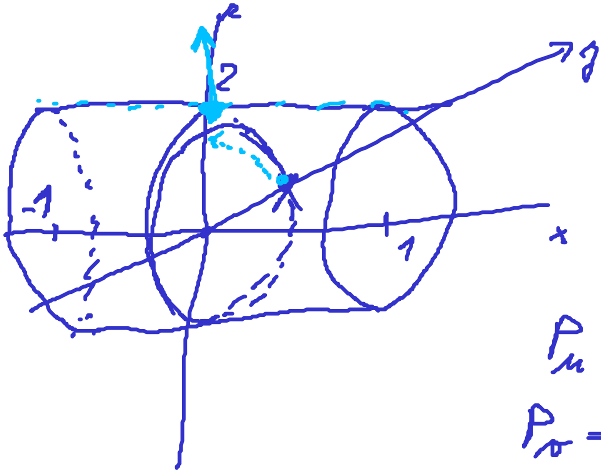
Tok vektorového pole plochou.

$\vec{f} = yz \cdot \vec{j} + z^2 \cdot \vec{k}$, $G \equiv y^2 + z^2 = 4$, $x = -1$, $x = 1$

$\vec{n}([0,0,2]) = \vec{k} = (0,0,1)$

Pr.:

$$\iint_G \vec{f} \cdot d\vec{p} = ?$$



P(u,v):

$x = v$
$y = 2\cos u$
$z = 2\sin u$,

B: $-1 \le v \le 1$
$0 \le u \le 2\pi$

$P_u = (0, -2\sin u, 2\cos u)$
$P_v = (1, 0, 0)$

$$P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2\sin u & 2\cos u \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, (-1)(-2\cos u), +2\sin u)$$

$$= \boxed{(0, 2\cos u, 2\sin u)}$$

$[u,v] = ?$ $\rightarrow$ $P(u,v) = [0, 0, 2]$

$$\left[\begin{array}{l} x = v = 0 \checkmark \\ y = 2\cos u = 0 \Rightarrow u = \left< \begin{array}{l} \pi/2 \\ 3\pi/2 \end{array} \right. \\ z = 2\sin u = +2 \Rightarrow \underline{\underline{u = \pi/2}} \end{array}\right.$$

$$\stackrel{\otimes}{=} 8 \cdot 2 \cdot [-\cos u]_0^{2\pi} = 16 \cdot (-\underbrace{\cos 2\pi}_{1} - (-\underbrace{\cos 0}_{1})) = 16(-1+1) = \underline{0}$$

$$P_u \times P_v \left(u = \pi/2, v = 0\right) = \left(0, 0, 2 \cdot \sin \pi/2 = 2\right) = (0,0,2)$$

$$\frac{(0,0,2)}{\|(0,0,2)\|} = \vec{k}$$

souhlasně (stejně) orientovaná $P(u,v)$ jako σ

$$\iint_\sigma (0, yz, z^2) \cdot d\vec{p} = +\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} \underbrace{(0, 2\cos u \cdot 2\sin u, 4\sin^2 u) \bullet (0, 2\cos u, 2\sin u)}\, du\, dv$$

$$= +\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} \underbrace{8\cos^2 u \sin u + 8\sin^3 u}_{8\sin u\,(\underbrace{\cos^2 u + \sin^2 u}_{=1})}\, du\, dv = +8\int_{-1}^{1} 1\, dv \cdot \int_0^{2\pi} \sin u\, du = \otimes$$

Jordanova věta:

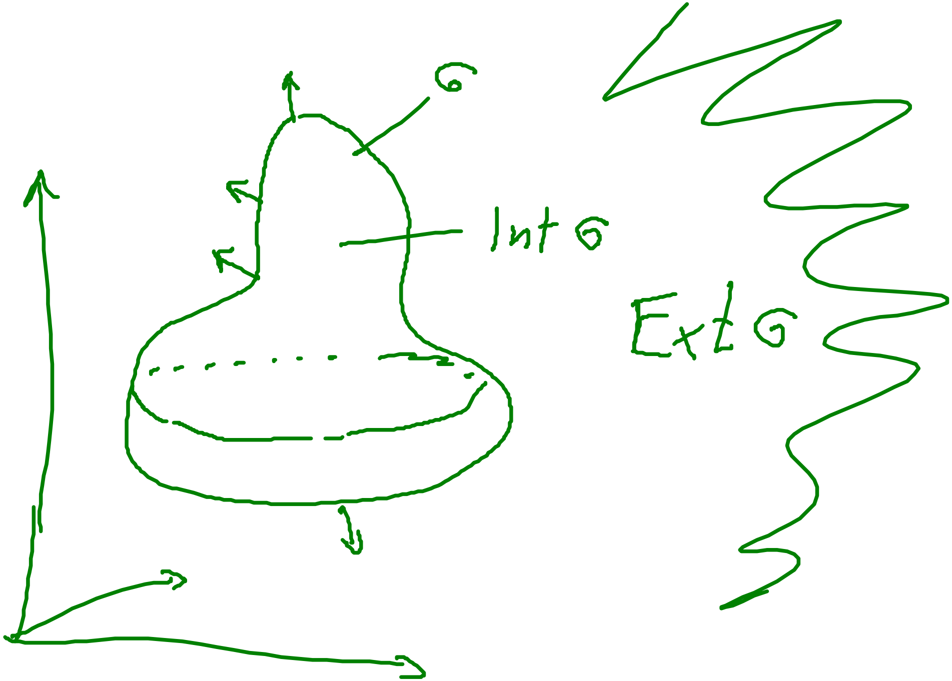
Nechť σ je uzavřená (jednoduchá!) (p. č.) hladká plocha v E_3. Pak v E_3 existují dvě disjunktní oblasti G_1 a G_2, jejichž společná hranice je plocha σ a dále platí:

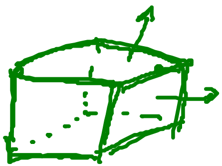
a) $E_3 = G_1 \cup \sigma \cup G_2$

b) jedna z oblastí G_1, G_2 je omezená a druhá neomezená!

Tedy oblasti G_1 a G_2 nazýváme vnitřek a vnějšek plochy σ, značíme $\mathrm{Int}\,\sigma$ a $\mathrm{Ext}\,\sigma$.

Def: Uzavřená plocha je orientována směrem ven, pokud její normálový vektor míří ve všech bodech plochy do vnějšku σ.





jednoduchá p. č. hladká plocha

Gaussova–Ostrogradského věta

Věta (Gaussova–Ostrogradského věta.). *Předpokládejme, že*

a) *vektorová funkce* $\mathbf{f}$ *má spojité parciální derivace v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$,

b) σ *je uzavřená po částech hladká plocha v* D, *orientovaná směrem vně a taková, že* $\mathrm{Int}\,\sigma \subset D$.

Pak platí:

$$\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} \;=\; \iiint_{\mathrm{Int}\,\sigma} \mathrm{div}\,\mathbf{f}\;\; dx\,dy\,dz.$$

Nějaké příklady na tabuli.

Gaussova–Ostrogradského věta

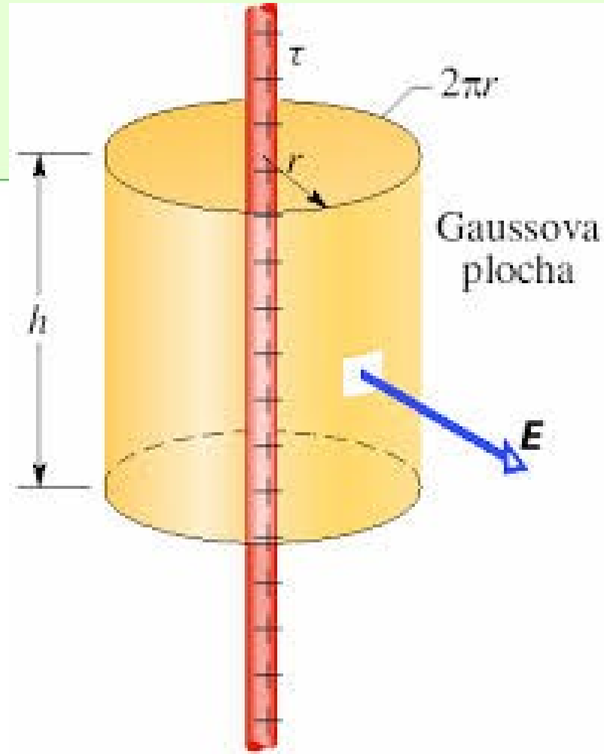
Věta (Gaussova–Ostrogradského věta.). *Předpokládejme, že*

a) *vektorová funkce* $\mathbf{f}$ *má spojité parciální derivace v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$,

b) σ *je uzavřená po částech hladká plocha v* D, *orientovaná směrem vně a taková, že* $\operatorname{Int}\sigma \subset D$.

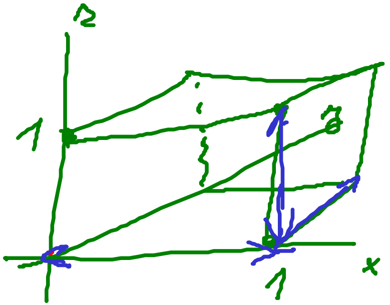
Pak platí:

$$\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \iiint_{\operatorname{Int}\sigma} \operatorname{div} \mathbf{f} \; dx\, dy\, dz.$$



Př: Vypočítejte tok $\vec{f} = \underset{\overset{\parallel}{u}}{xy\,\vec{i}} + \underset{\overset{\parallel}{v}}{yz\,\vec{j}} + \underset{\overset{\parallel}{w}}{xz\,\vec{k}}$

skrze vn. povrch krychle $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ orient. vně.



$$\iint_{\sigma} \vec{f} \cdot d\vec{p} \overset{GV}{=} + \iiint_{\mathrm{Int}\,\sigma} \operatorname{div} \vec{f} \, dx\,dy\,dz$$

a) spoj. PD $\vec{f}$:

$\frac{\partial u}{\partial x} = y$. spoj. v E_3.

$\frac{\partial v}{\partial y} = z$.

$\frac{\partial w}{\partial z} = x$.

$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$

$= \underline{y + z + x}$

b) σ je uzavřená ✓

Int σ leží $D = E_3$ ✓

vnější orient. plochy σ

Tok $\vec{f}$ povrchem krychle $= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \overbrace{(y+z+x)}^{=\operatorname{div}\vec{f}}\,dx\,dy\,dz =$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left(\underbrace{\left[yx+zx+\frac{x^2}{2}\right]_0^1}_{=\,y+z+\frac{1}{2}} \right) dy\,dz = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}+yz+\frac{1}{2}y\right]_0^1 dz$$

$$= \int_0^1 \cancel{\frac{1}{2}} + z + \cancel{\frac{1}{2}}\,dz = \left[\frac{z^2}{2}+1z\right]_0^1 = \frac{1}{2}+1 = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

Př: Tok válcovou plochou $\sigma: y^2+z^2=4,\ -1\le x\le 1$

$$\vec{f}=(0,\ yz,\ z^2)$$

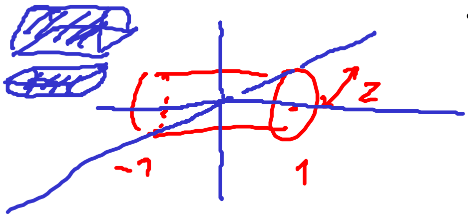
Ověření G-O.V.

a) $\dfrac{\partial U}{\partial x}=0 \qquad \dfrac{\partial V}{\partial y}=z \qquad \dfrac{\partial W}{\partial z}=2z$ spoj. v E_3

b) σ je orientovaná vně

je uzavřená!! Jj. včetně toho spodní a horní podstavou

$$\hookrightarrow \iint_\sigma \vec{f}\cdot d\vec{p} = +\iiint_{\mathrm{Int}\,\sigma} (\underbrace{0+z+2z}_{3z})\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}\int_{0}^{2\pi} 3r\sin\varphi\cdot r\,d\varphi\,dr\,dw$$



$x = w \qquad w\in\langle -1,1\rangle$

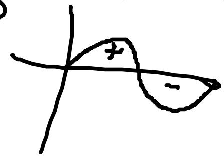
$y = r\cos\varphi \qquad r\in\langle 0,2\rangle$

$z = r\sin\varphi \qquad \varphi\in\langle 0,2\pi\rangle$

$J = r$

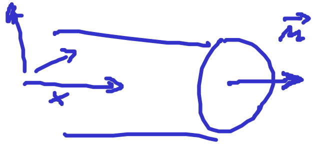
$$= \int_{-1}^{1} 1\,dw \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} 3 r^2 \sin\varphi \, d\varphi \right) dr =$$

$$= \int_{-1}^{1} 1\,dw \cdot \int_0^2 3 r^2 \, dr \cdot \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi = 2 \cdot \underbrace{\cancel{3}\left[\frac{r^3}{\cancel{3}}\right]_0^2}_{=8} \cdot \underbrace{\left[\cos\varphi\right]_0^{2\pi}}_{=0}$$



$$= 0$$

ad $\Rightarrow$ dopočítání toku $\vec{f}$ skrz spodní a horní podstavu válce



$\vec{n} = (1,0,0)$

$P(u,v)$:

$x = 1$

$y = u$

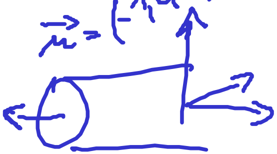
$z = v$

$B = ?$

$$\iint\limits_{\text{horní podstava}} \vec{f} \cdot \vec{n} \, dp =$$

$$= \iint\limits_{\text{horní podstava}} (0, yz, z^2) \cdot (1,0,0) \, dp = \underline{\underline{0}}$$

$\vec{n} = (-1,0,0)$



spodní podstavy