

## Matematika II – přednáška 2

### Co bude dneska?

Co to je izokřivka (izoplocha).

Operace s funkcemi, Složená funkce, Omezená funkce, Vektorová funkce.

Limita a spojitost funkce  $n$ -proměnných.

Parciální derivace a jejich geometrický význam.

Gradient funkce  $n$ -proměnných a jeho fyzikální a geometrický význam.

P.S.: Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese

[http://marian.fsik.cvut.cz/~neustupa/M2\\_Neu\\_prednaska02.pdf](http://marian.fsik.cvut.cz/~neustupa/M2_Neu_prednaska02.pdf)

Slidy nenahrazují skripta ani zápisky ani účast na přednášce a jsou pouze pro osobní potřeby.

## Izokřivky, Izoplochy

Kromě grafu je jiná možnost jak vizualizovat funkci dvou (více) proměnných sestavením soustavy (několika) izokřivek.

**Definice (izokřivka).** Je-li  $y = f(x_1, x_2)$  funkce dvou proměnných a  $k$  je zvolené reálné číslo, pak množinu bodů  $\{[x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; f(x_1, x_2) = k\}$  nazýváme *izokřivkou* funkce  $f$ . Rovnici  $f(x_1, x_2) = k$  nazýváme rovnicí uvažované izokřivky.

Př:  $f(x, y) = x^2 + y^2$  pro  $k_1 = 1, k_2 = 4, k_3 = 0, k_4 = -4$ .

Příklady z praxe: vrstevnice (body na křivce se stejnou nadmořskou výškou), izobara (stejný tlak), izoterma (stejná teplota) ...

**Definice (izoplocha).** Je-li  $f$  funkce tří proměnných a  $k$  je reálné číslo, pak množinu bodů  $\{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{E}_3; f(x_1, x_2, x_3) = k\}$  nazýváme *izoplochou* funkce  $f$ .

## Operace s funkcemi

Nechť  $f$  a  $g$  jsou funkce  $n$  proměnných s definičními obory  $D(f)$ ,  $D(g) \subset \mathbb{E}_n$ .

*Součtem* funkcí rozumíme funkci  $h$ , kde  $D(h) = D(f) \cap D(g)$  a která každému  $X \in D(h)$  přiřazuje hodnotu

$$h(X) = f(X) + g(X)$$

Zkrácený zápis  $h = f + g$ .

*Rozdíl, součin, podíl* funkcí. Na tabuli.

**Složená funkce**

na tabuli

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k)$$

$$\vdots$$

$$x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k)$$

$$y = T(x_1, x_2, x_3)$$

$$x_1 = \varphi_1(t)$$

$$x_2 = \varphi_2(t)$$

$$x_3 = \varphi_3(t)$$

$y = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_k))$

musí  $G \subset E_k$

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$  jsou def. na  $G$

$\hookrightarrow f$  musí být def.  $H\varphi_i(G)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

## Složená funkce

na tabuli

## Omezená funkce

**Definice (omezená funkce).** *Nechť  $f$  je funkce  $n$  proměnných a  $M \subset D(f)$ . Funkci  $f$  nazýváme **shora omezenou na množině  $M$** , jestliže existuje reálné číslo  $K$  takové, že  $\forall X \in M : f(X) \leq K$ .*

Obdobně, funkci  $f$  nazýváme **zdola omezenou na množině  $M$** , jestliže existuje reálné číslo  $L$  takové, že  $\forall X \in M : f(X) \geq L$ .

Funkci  $f$  nazýváme **omezenou na množině  $M$** , je-li  $f$  na  $M$  omezená zdola i shora.

Je-li funkce  $f$  shora omezená na celém svém definičním oboru  $D(f)$ , pak tuto funkci nazýváme krátce **shora omezenou**. Podobně i funkci **zdola omezenou** a **omezenou**.

**Vektorová funkce**

vekt. pole

na tabuli

$$f^{\rightarrow}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \text{vektor o } n \text{ složkách}$$

$x \in E_n$

$$f = f^{\rightarrow} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

- $f^{\rightarrow} = (\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

- $f^{\rightarrow} = (u, v)$

## Limita a spojitost funkce $n$ -proměnných

$\mathbb{R}^*$  je tzv. rozšířená množina reálných čísel.

Je to sjednocení množiny reálných čísel  $\mathbb{R}$  a dvouprvkové množiny  $\{-\infty; +\infty\}$ .

Nechť je  $f$  funkce  $n$  proměnných,  $A \in \mathbb{E}_n$  a  $a \in \mathbb{R}^*$ .

Poznámka: Při limitě uvažujeme, že se bod  $X$  blíží k nějakému bodu  $A$ . U funkce jedné proměnné to bylo po ose  $x$ . Zde budeme předpokládat blížení "ze všech směrů".

**Definice (limita funkce).** *Nechť  $f$  je funkce  $n$  proměnných,  $A \in \mathbb{E}_n$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$  a existuje prstencové okolí  $P(A)$ , které je celé obsaženo v definičním oboru funkce  $f$ . Jestliže pro každou posloupnost bodů  $\{X_k\}$  v  $P(A)$  platí implikace*

$$X_k \rightarrow A \implies f(X_k) \rightarrow a,$$

*pak číslo  $a$  nazýváme **limitou funkce  $f$  pro  $X$  blížící se k  $A$** . Píšeme:*

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = a \quad \text{nebo} \quad \lim_{x_1 \rightarrow a_1, \dots, x_n \rightarrow a_n} f(x_1, \dots, x_n) = a.$$

$X_k \rightarrow A$  je kratší zápis toho, že  $\lim_{k \rightarrow +\infty} X_k = A$ .

Podobně,  $f(X_k) \rightarrow a$  znamená, že  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(X_k) = a$ .

Pozn.: Funkce nemusí být definována v bodě  $A$ !

Př.: na tabuli. Věta na tabuli.



**Rozdíl, součet, součin a podíl limit.**

Předpokládejme, že  $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = a$  a  $\lim_{X \rightarrow A} g(X) = b$ . Pak

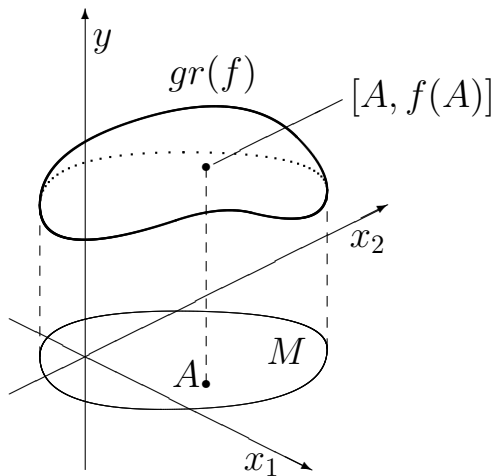
$$\lim_{X \rightarrow A} [f(X) \pm g(X)] = a \pm b,$$

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) \cdot g(X) = a \cdot b,$$

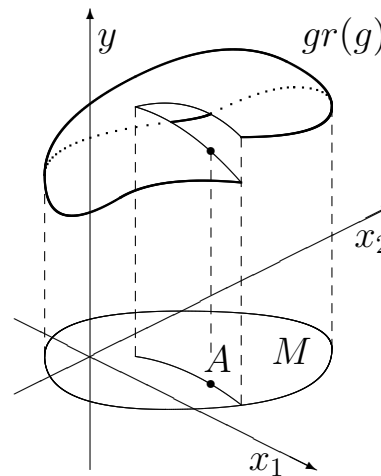
$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{a}{b}$$

za předpokladu, že výrazy na pravých stranách mají smysl.

**Spojitosť funkce - myšlenka, Obrázek ze skript**



Obr. 5a



Obr. 5b

Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $A$  a v množině  $M$  zatímco funkce  $g$  není spojitá tamtéž.

## Spojítost funkce v bodě/na množině - definice

**Definice (Spojítost funkce v bodě).** Předpokládejme, že  $f$  je funkce  $n$  proměnných,  $A \in D(f)$  a existuje okolí  $U(A)$ , které je celé obsaženo v  $D(f)$ . Říkáme, že funkce  $f$  je *spojitá v bodě*  $A$ , jestliže pro každou posloupnost bodů  $\{X_k\}$  v  $U(A)$  platí implikace

$$X_k \rightarrow A \implies f(X_k) \rightarrow f(A).$$

Vzhledem k definici limity platí: Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $A$  právě tehdy, je-li

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A).$$

Poznámka: Spojitost vzhledem k množině se od zmíněné definice liší akorát tím, že jak bod  $A$  tak posloupnost bodů  $X_k$  musí být v množině  $M$ . (Tedy studujeme pouze chování v této množině).

Spojítost na množině  $M$  potom znamená, že je funkce spojitá vzhledem k množině  $M$  v každém bodě množiny  $M$ .

Věty(o spojitosti součtu ...): na tabuli.

## Parciální derivace - motivace

Derivace funkce jedné proměnné v bodě, je vlastně otázka toho jak rychle se hodnota funkce mění když tímto bodem procházím. Mám pouze jednu možnost, (zleva doprava podél osy  $x$ ).

U funkce více proměnných mám nekonečně mnoho směrů ze kterých mohu bodem projít.

Budu procházet bodem  $A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbb{E}_n$  ve směru souřadných os. Například ve směru osy  $x_1$ .

Pak má proměnný bod  $X$  všechny souřadnice kromě první (osa  $x_1$ ) stejné jako bod  $A$ . Tj.  $X = [x_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ .

Tedy na funkci  $f$  mohu hledět jako na funkci jedné proměnné a jako takovou ji i derivovat:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h},$$

jestliže tato limita existuje a je konečná. Derivaci nazýváme parciální derivace funkce  $f$  podle  $x_1$  v bodě  $A$ . Lze též psát  $[a_1 + h, a_2, \dots, a_n] = A + h\mathbf{e}_1$ .

**Parciální derivace - definice**

**Definice (parciální derivace v bodě  $A$ ).** Předpokládejme, že  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  je funkce  $n$  proměnných,  $A = [a_1, \dots, a_n] \in D(f)$ ,  $i$  je jedno z čísel  $1, \dots, n$  a  $\mathbf{e}_i$  je jednotkový vektor v  $\mathbb{E}_n$ , orientovaný souhlasně se souřadnou osou  $x_i$ . Existuje-li konečná limita

$$(I.4.3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + h\mathbf{e}_i) - f(A)}{h},$$

pak její hodnotu nazýváme *parciální derivací funkce  $f$  podle proměnné  $x_i$  v bodě  $A$*  a označujeme ji

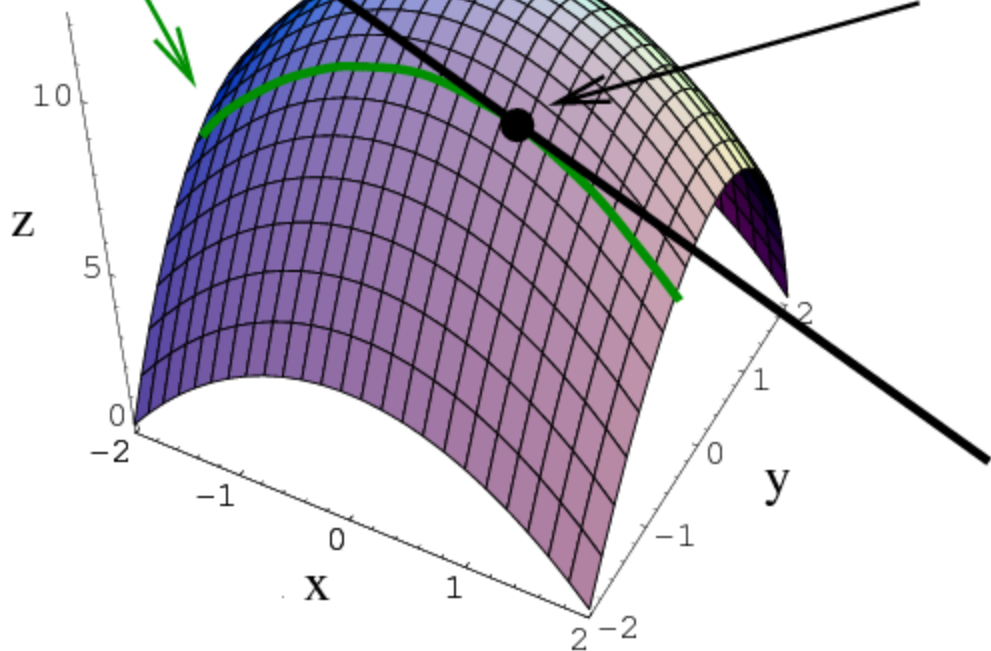
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(A) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial y}{\partial x_i}(A).$$

Uvážit geometrický význam. Vlastnosti a výpočet na tabuli.

Line has slope  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$

Graph of  $f(x, b)$

Point  $(a, b, f(a, b))$



**Gradient funkce  $f$  v bodě  $A$** 

**Definice (gradient).** *Nechť je  $f$  funkce  $n$  proměnných  $x_1, \dots, x_n$  a  $A$  je bod v  $\mathbb{E}_n$ , ve kterém má funkce  $f$  parciální derivace podle všech proměnných. **Gradientem** funkce  $f$  v bodě  $A$  nazýváme vektor, který značíme  $\text{grad } f(A)$  a pro který platí:*

$$\text{grad } f(A) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right).$$

jiné označení

$$\text{grad } f(A) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \mathbf{e}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \mathbf{e}_n.$$

Význam a příklad na tabuli.