Gradient a derivace ve směru

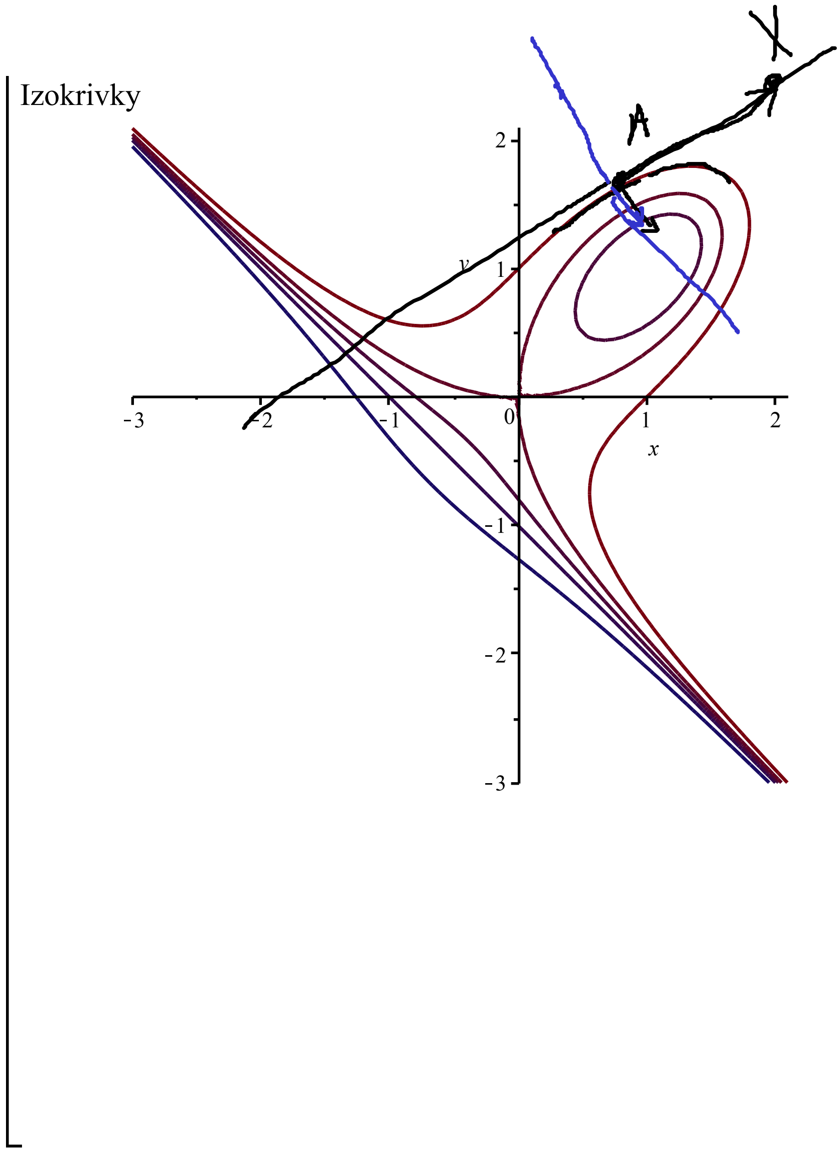
Je skutečně gradient směrem, ve kterém funkce nejrychleji roste?

Na tabuli.

Tečna a normála k izokřivce, tečná rovina a normála k izoploše

Na tabuli.

$\to f(x,y) = C$



tečna k izokřivce

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(A)(x_1-a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2-a_2) = 0$$

$\operatorname{grad} f(A) \perp$ tečna

$\downarrow$

$\overrightarrow{X-A}$

normála k izokřivce

$\vec{n} \parallel \operatorname{grad} f(A)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(A)(x_1-a_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2-a_2) = 0$$

Gradient a derivace ve směru

Je skutečně gradient směrem, ve kterém funkce nejrychleji roste?

Na tabuli.

$y = f(x_1, x_2, x_3) = C$

Tečna a normála k izokřivce, tečná rovina a normála k izoploše

Na tabuli.

tečná rovina k izoploše

grad $f(A)$ ⊥ tečná rovina

$$\hookrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)(x_2 - a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(A)(x_3 - a_3) = 0$$

normála k izoploše

$$\vec{n} \parallel \operatorname{grad} f(A) \Rightarrow X = A + t \cdot \operatorname{grad} f(A), \; t \in R$$

Matematika II – přednáška 5

Co bude dneska?

Shrnutí toho co bylo.

Parciální derivace vyšších řádů.

Lokální extrémy funkcí dvou proměnných.

Nutná podmínka, postačující podmínky pro existenci extrému.

P.S.: Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska05.pdf$
(pro osobní potřeby, nenahrazuje skripta).

Funkce f má spojité parciální derivace podle všech proměnných v bodě A.

$\Downarrow$

f je diferencovatelná v bodě A. $\Longrightarrow$

1. *f je spojitá v bodě A.*
2. *Existuje tečná rovina ke grafu funkce f v bodě A.*
3. *Existuje diferenciál funkce f v bodě A.*
4. *Derivace f ve směru daném nenulovým vektorem $\mathbf{u}$ existuje.*
5. *Gradient funkce f v bodě A má geometrický a fyzikální význam, popsaný dříve.*

Parciální derivace vyšších řádů

Definice (parciální derivace vyšších řádů). *Předpokládejme, že f je funkce n proměnných $x_1, \dots, x_n$ a $i \in \{1;\dots;n\}$. Připomeňme, že funkce $\partial f/\partial x_i$ je parciální derivace f podle x_i.*

Je-li $j \in \{1;\dots;n\}$, pak parciální derivaci podle x_j funkce $\partial f/\partial x_i$ nazýváme parciální derivací 2. řádu (nebo druhou parciální derivací) funkce f podle x_j a x_i.

Označujeme ji
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i} \quad \left(\text{případně } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \text{pokud } j = i\right).$$

Pro definiční obory platí inkluze $\quad D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}\right) \subset D\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \subset D(f).$

Parciální derivace vyšších (třetího, čtvrtého a dalších) řádů jsou definovány obdobně.

Příklady na tabuli.

$$f(x,y) = x^2y + \cos y + y\sin x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 0 + y\cos x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - \sin y + \sin x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y + y(-\sin x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 2x + \cos x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 2x - 0 + \cos x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos y$$

Záměna pořadí parciálních derivací

V minulém příkladu vyšlo, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,.$$

Je to tak vždy?

Záměna pořadí parciálních derivací

V minulém příkladu vyšlo, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\,.$$

Je to tak vždy?

Ne vždy, ale skoro vždy, když je funkce ”rozumná”.

Př.

Věta (o záměně pořadí parciálních derivací). *Předpokládejme, že f je funkce n proměnných $x_1, \ldots, x_n$ a $i, j \in \{1; \ldots; n\}$. Jestliže obě druhé parciální derivace $\partial^2 f / \partial x_i \, \partial x_j$ a $\partial^2 f / \partial x_j \, \partial x_i$ existují v bodě $X = [x_1, \ldots, x_n]$ a alespoň jedna z nich je v bodě X spojitá, pak*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}(X).$$

Příklady na PD na tabuli.

Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Definice (lokální extrémy). *Nechť* f *je funkce* n *proměnných a* $A \in D(f)$*. Říkáme, že funkce* f *má v bodě* A *lokální maximum, existuje-li prstencové okolí* $P(A) \subset D(f)$ *takové, že* $\forall X \in P(A): \; f(X) \leq f(A)$.

Podobně, funkce f *má v bodě* A *lokální minimum, existuje-li prstencové okolí* $P(A)$ *takové, že* $\forall X \in P(A): \; f(X) \geq f(A)$.

Lokální maximum a lokální minimum se souhrnně nazývají lokální extrémy.

Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Definice (lokální extrémy). *Nechť f je funkce n proměnných a $A \in D(f)$. Říkáme, že funkce f má v bodě A lokální maximum, existuje-li prstencové okolí $P(A) \subset D(f)$ takové, že $\forall X \in P(A): \; f(X) \leq f(A)$.*
Podobně, funkce f má v bodě A lokální minimum, existuje-li prstencové okolí $P(A)$ takové, že $\forall X \in P(A): \; f(X) \geq f(A)$.
Lokální maximum a lokální minimum se souhrnně nazývají lokální extrémy.

Změníme-li nerovnosti v definici lokálních extrémů na ostré, získáme definici tzv. *ostrých lokálních extrémů*:

Říkáme, že funkce f má v bodě A *ostré lokální maximum* (respektive *ostré lokální minimum*), existuje-li prstencové okolí $P(A) \subset D(f)$ takové, že $\forall X \in P(A): \; f(X) < f(A)$ (respektive $\forall X \in P(A): \; f(X) > f(A)$).

Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému

Věta (nutná podmínka pro existenci lokálního extrému). *Nechť funkce f, n proměnných, je diferencovatelná v bodě A. Má-li f v bodě A lokální extrém, pak*

$$\operatorname{grad} f(A) = \mathbf{0}.$$

Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému

Věta (nutná podmínka pro existenci lokálního extrému). *Nechť funkce f, n proměnných, je diferencovatelná v bodě A. Má-li f v bodě A lokální extrém, pak*

$$\operatorname{grad} f(A) = \mathbf{0}.$$

Poznámka: Všimněte si, že tato podmínka není omezená na funkci dvou proměnných. Je to tedy bod, kde je tečná rovina (nadrovina) ”vodorovná”.

Definice (kritický bod). *Uvažujeme-li i funkce, které nejsou v bodě A diferencovatelné, můžeme konstatovat: Funkce f (n proměnných) může mít v bodě $A \in \mathbb{E}_n$ lokální extrém pouze v případě, že*

i) *f je diferencovatelná v bodě A a* $\operatorname{grad} f(A) = \mathbf{0}$,

ii) *nebo f není diferencovatelná v bodě A.*

Bod A, který vyhovuje podmínce i) nebo podmínce ii), se nazývá *kritický bod* funkce f. (Často se také používá název *stacionární bod*.)

Př: Hledáme kritické body funkce: $f(x, y) = x^3 + y^3 + \frac{9}{2}x^2 - 3y - 12x$.

Označme

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) \end{pmatrix}.$$

A dále

$$\Delta_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), \qquad \Delta_2(A) = \det \mathcal{M} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) \end{vmatrix}.$$

Věta (postačující podmínky pro lokální extrémy). *Předpokládejme, že* $y = f(x_1, x_2)$ *je funkce dvou proměnných, která má první i druhé parciální derivace spojité v bodě* A *a* $\operatorname{grad} f(A) = \mathbf{0}$. *Pak platí:*

a) Jestliže $\Delta_1(A) > 0$ *a* $\Delta_2(A) > 0$, *má funkce* f *v bodě* A *ostré lokální minimum.*

b) Jestliže $\Delta_1(A) < 0$ *a* $\Delta_2(A) > 0$, *má funkce* f *v bodě* A *ostré lokální maximum.*

c) Je-li $\Delta_2(A) < 0$, *pak* f *nemá v bodě* A *lokální extrém.*

Pokračování předchozího příkladu.

Pozn.: -”, vyšší dimenze.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 9 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

$$M_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x+9 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

① $M(\underset{[1,1]}{A}) = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$\Delta_2(A) = 90 > 0$ (je extrém)

$\Delta_1(A) = 15 > 0 \Rightarrow A$ je lok. min.

② $M(\underset{[1,-1]}{B}) = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

$\Delta_2(B) = -90 < 0$ B není lok. extrém

$\operatorname{grad} f(B) = \vec{0}$

3) C

4) D