Matematika II – přednáška 2

Co bude dneska?

Co to je izokřivka (izoplocha).

Operace s funkcemi, Složená funkce, Omezená funkce, Vektorová funkce.

Limita a spojitost funkce n-proměnných.

Parciální derivace a jejich geometrický význam.

Gradient funkce n-proměnných a jeho fyzikální a geometrický význam.

P.S.: Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska02.pdf$
Slidy nenahrazují skripta ani zápisky ani účast na přednášce a jsou pouze pro osobní potřeby.

Izokřivky, Izoplochy

Kromě grafu je jiná možnost jak vizualizovat funkci dvou (více) proměnných sestrojením soustavy (několika) izokřivek.

Definice (izokřivka). *Je-li* $y = f(x_1, x_2)$ *funkce dvou proměnných a* k *je zvolené reálné číslo, pak množinu bodů* $\{[x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2;\ f(x_1, x_2) = k\}$ *nazýváme izokřivkou funkce* f*. Rovnici* $f(x_1, x_2) = k$ *nazýváme rovnicí uvažované izokřivky.*

Př: $f(x, y) = x^2 + y^2$ pro $k_1 = 1,\ k_2 = 4,\ k_3 = 0,\ k_4 = -4.$

Příklady z praxe: vrstevnice (body na křivce se stejnou nadmořskou výškou), izobara (stejný tlak), izoterma (stejná teplota) ...

Definice (izoplocha). *Je-li* f *funkce tří proměnných a* k *je reálné číslo, pak množinu bodů* $\{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{E}_3;\ f(x_1, x_2, x_3) = k\}$ *nazýváme izoplochou funkce* f*.*

Operace s funkcemi

Nechť f a g jsou funkce n proměnných s definičními obory $D(f),\ D(g) \subset \mathbb{E}_n$.

Součtem funkcí rozumíme funkci h, kde $D(h) = D(f) \cap D(g)$ a která každému $X \in D(h)$ přiřazuje hodnotu

$$h(X) = f(X) + g(X)$$

Zkrácený zápis $h = f + g$.

Rozdíl, součin, podíl funkcí. Na tabuli.

Složená funkce

na tabuli

Složená funkce

na tabuli

Omezená funkce

Definice (omezená funkce). *Nechť f je funkce n proměnných a $M \subset D(f)$. Funkci f nazýváme shora omezenou na množině M, jestliže existuje reálné číslo K takové, že $\forall\, X \in M\ :\ f(X) \leq K$.*

Obdobně, funkci f nazýváme *zdola omezenou na množině M*, jestliže existuje reálné číslo L takové, že $\forall\, X \in M\ :\ f(X) \geq L$.

Funkci f nazýváme *omezenou na množině M*, je-li f na M omezená zdola i shora.

Je-li funkce f shora omezená na celém svém definičním oboru $D(f)$, pak tuto funkci nazýváme krátce *shora omezenou*. Podobně i funkci *zdola omezenou* a *omezenou*.

Vektorová funkce

na tabuli

Limita a spojitost funkce n-proměnných

$\mathbb{R}^*$ je tzv. rozšířená množina reálných čísel.
Je to sjednocení množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ a dvouprvkové množiny $\{-\infty; +\infty\}$.

Nechť je f funkce n proměnných, $A \in \mathbb{E}_n$ a $a \in \mathbb{R}^*$.

Poznámka: Při limitě uvažujeme, že se bod X blíží k nějakému bodu A. U funkce jedné proměnné to bylo po ose x. Zde budeme předpokládat blížení ”ze všech směrů”.

Definice (limita funkce). *Nechť f je funkce n proměnných, $A \in \mathbb{E}_n$, $a \in \mathbb{R}^*$ a existuje prstencové okolí $P(A)$, které je celé obsaženo v definičním oboru funkce f. Jestliže pro každou posloupnost bodů $\{X_k\}$ v $P(A)$ platí implikace*

$$X_k \to A \implies f(X_k) \to a,$$

pak číslo a nazýváme limitou funkce f pro X blížící se k A. Píšeme:

$$\lim_{X \to A} f(X) = a \qquad \textit{nebo} \qquad \lim_{x_1 \to a_1, \dots, x_n \to a_n} f(x_1, \dots, x_n) = a.$$

$X_k \to A$ je kratší zápis toho, že $\lim\limits_{k \to +\infty} X_k = A$.

Podobně, $f(X_k) \to a$ znamená, že $\lim\limits_{k \to +\infty} f(X_k) = a$.

Pozn.: Funkce nemusí být definována v bodě A!

Př.: na tabuli. Věta na tabuli.

Rozdíl, součet, součin a podíl limit.

Předpokládejme, že $\lim\limits_{X\to A} f(X) = a$ a $\lim\limits_{X\to A} g(X) = b$. Pak

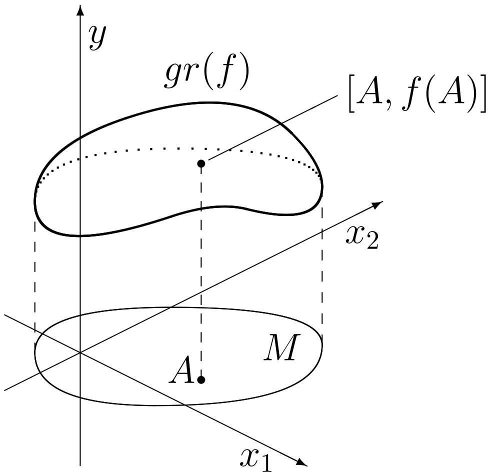
$$\lim_{X\to A} \big[\, f(X) \pm g(X) \,\big] \;=\; a \pm b,$$

$$\lim_{X\to A} f(X) \cdot g(X) \;=\; a \cdot b,$$

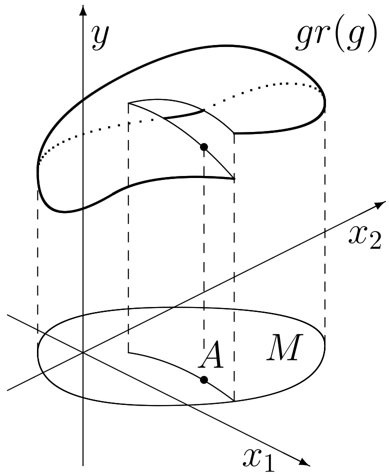
$$\lim_{X\to A} \frac{f(X)}{g(X)} \;=\; \frac{a}{b}$$

za předpokladu, že výrazy na pravých stranách mají smysl.

Spojitost funkce - myšlenka, Obrázek ze skript



Obr. 5a



Obr. 5b

Funkce f je spojitá v bodě A a v množině M zatímco funkce g není spojitá tamtéž.

Spojitost funkce v bodě/na množině - definice

Definice (Spojitost funkce v bodě). *Předpokládejme, že f je funkce n proměnných, $A \in D(f)$ a existuje okolí $U(A)$, které je celé obsaženo v $D(f)$. Říkáme, že funkce f je spojitá v bodě A, jestliže pro každou posloupnost bodů $\{X_k\}$ v $U(A)$ platí implikace*

$$X_k \to A \implies f(X_k) \to f(A).$$

Vzhledem k definici limity platí: Funkce f je spojitá v bodě A právě tehdy, je-li

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A).$$

Poznámka: Spojitost vzhledem k množině se od zmíněné definice liší akorát tím, že jak bod A tak posloupnost bodů X_k musí být v množině M. (Tedy studujeme pouze chování v této množině).

Spojitost na množině M potom znamená, že je funkce spojitá vzhledem k množině M v každém bodě množiny M.

Věty(o spojitosti součtu ...): na tabuli.

Parciální derivace - motivace

Derivace funkce jedné proměnné v bodě, je vlastně otázka toho jak rychle se hodnota funkce mění když tímto bodem procházím. Mám pouze jednu možnost, (zleva doprava podél osy x).

U funkce více proměnných mám nekonečně mnoho směrů ze kterých mohu bodem projít.

Budu procházet bodem $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \in \mathbb{E}_n$ ve směru souřadných os. Například ve směru osy x_1.
Pak má proměnný bod X všechny souřadnice kromě první (osa x_1) stejné jako bod A. Tj. $X = [x_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$.
Tedy na funkci f mohu hledět jako na funkci jedné proměnné a jako takovou ji i derivovat:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h},$$

jestliže tato limita existuje a je konečná. Derivaci nazýváme parciální derivace funkce f podle x_1 v bodě A. Lze též psát $[a_1 + h, a_2, \ldots, a_n] = A + h\mathbf{e}_1$.

Parciální derivace - definice

Definice (parciální derivace v bodě A). *Předpokládejme, že $y = f(x_1, \dots, x_n)$ je funkce n proměnných, $A = [a_1, \dots, a_n] \in D(f)$, i je jedno z čísel $1, \dots, n$ a $\mathbf{e}_i$ je jednotkový vektor v $\mathbb{E}_n$, orientovaný souhlasně se souřadnou osou x_i. Existuje-li konečná limita*

(I.4.3)
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(A + h\mathbf{e}_i) - f(A)}{h},$$

pak její hodnotu nazýváme parciální derivací funkce f podle proměnné x_i v bodě A a označujeme ji

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(A) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial y}{\partial x_i}(A).$$

Uvážit geometrický význam. Vlastnosti a výpočet na tabuli.

Gradient funkce f v bodě A

Definice (gradient). *Nechť je f funkce n proměnných $x_1, \ldots, x_n$ a A je bod v $\mathbb{E}_n$, ve kterém má funkce f parciální derivace podle všech proměnných. Gradientem funkce f v bodě A nazýváme vektor, který značíme* $\operatorname{grad} f(A)$ *a pro který platí:*

$$\operatorname{grad} f(A) \;=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A),\; \ldots,\; \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)\right).$$

jiné označení

$$\operatorname{grad} f(A) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)\,\mathbf{e}_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)\,\mathbf{e}_n\,.$$

Význam a příklad na tabuli.