Matematika II – přednáška 4

Co bude dneska?

Rovnice tečné roviny a normály. Diferenciál funkce více proměnných.

Přibližný výpočet hodnoty funkce pomocí diferenciálu a/nebo tečné roviny.

Derivace ve směru. (tj. i jiný směr než jen ve směru os).

P.S.: Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska04.pdf$
Slidy nenahrazují skripta ani zápisky ani účast na přednášce a jsou pouze pro osobní potřeby.

Tečná rovina ke grafu funkce dvou proměnných

Shrnutí: Rovina $y = L(X)$, kde

$$L(X) \; = \; f(A) \; + \; k_1 \cdot (x_1 - a_1) \; + \; k_2 \cdot (x_2 - a_2)$$

splňuje požadavky a), b) a c) a můžeme ji tudíž nazvat tečnou rovinou k ploše σ v bodě P, jestliže je splněna podmínka

$$\lim_{X \to A} \frac{f(X) - L(X)}{\|X - A\|} \; = \; 0.$$

Jak najít koeficienty k_1 a k_2? (Obecně až k_n).

Tečná rovina ke grafu funkce dvou proměnných

Shrnutí: Rovina $y = L(X)$, kde

$$L(X) \; = \; f(A) \; + \; k_1 \cdot (x_1 - a_1) \; + \; k_2 \cdot (x_2 - a_2)$$

splňuje požadavky a), b) a c) a můžeme ji tudíž nazvat tečnou rovinou k ploše σ v bodě P, jestliže je splněna podmínka

$$\lim_{X \to A} \frac{f(X) - L(X)}{\|X - A\|} \; = \; 0.$$

Definice (tečná rovina). *Předpokládejme, že funkce $y = f(x_1, x_2)$, dvou proměnných, je diferencovatelná v bodě $A = [a_1, a_2] \in \mathbb{E}_2$. Tečnou rovinou ke grafu funkce f v bodě $P = [A, f(A)] \in \mathbb{E}_3$ nazýváme rovinu o rovnici*

$$y \; = \; f(A) \; + \; \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) \; + \; \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) \cdot (x_2 - a_2).$$

Tečná rovina ke grafu funkce dvou či více proměnných

Definice (tečná rovina). *Předpokládejme, že funkce $y = f(x_1, x_2)$, dvou proměnných, je diferencovatelná v bodě $A = [a_1, a_2] \in \mathbb{E}_2$. Tečnou rovinou ke grafu funkce f v bodě $P = [A, f(A)] \in \mathbb{E}_3$ nazýváme rovinu o rovnici*

$$y = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) \cdot (x_2 - a_2).$$

Definici můžeme snadno zobecnit pro funkci n proměnných:

Předpokládejme, že funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$, n proměnných, je diferencovatelná v bodě $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{E}_n$. *Tečnou rovinou* ke grafu funkce f v bodě $P = [A, f(A)] \in \mathbb{E}_{n+1}$ nazýváme množinu bodů v $\mathbb{E}_{n+1}$, vyhovujících rovnici

$$y = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot (x_n - a_n).$$

Někdy hovoříme o tečné nadrovině. (Je to v $\mathbb{E}_{n+1}$). Příklad.

Normála ke grafu funkce dvou proměnných

Definice (normála). *Předpokládejme, že funkce* $y = f(x_1, x_2)$ *je diferencovatelná v bodě* $A = [a_1, a_2] \in \mathbb{E}_2$. *Normálou grafu funkce* f *v bodě* $P = [A, f(A)] \in \mathbb{E}_3$ *nazýváme přímku v* $\mathbb{E}_3$*, která prochází bodem* P *a je v tomto bodě kolmá k tečné rovině. Směrovým vektorem normály je vektor*

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(A),\ -1 \right).$$

Parametrické rovnice normály jsou

$$x_1 = a_1 + t\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \quad x_2 = a_2 + t\,\frac{\partial f}{\partial x_2}(A), \quad y = f(A) - t; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Diferenciál funkce.

Měli jsme

$$f(X) \doteq f(A) + \mathrm{d}f,$$

kde

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) \cdot (x_2 - a_2).$$

Příklad.

Derivace ve směru

Připomenutí, gradient funkce f v bodě $A \in D(f) \subseteq (\in \mathbb{E}_n)$ je vektor

$$\operatorname{grad} f(A) \; = \; \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \; \ldots, \; \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right).$$

Parciální derivace říkají, jak rychle se funkce mění v bodu A, když jím nějaký proměnný bod X prochází ve směru shodným s orientací osy x_i.

Nyní nás bude zajímat změna hodnoty $f(X)$, když bude bod X procházet bodem A nějakým jiným (obecným) směrem.

Definice (derivace ve směru). *Předpokládejme, že f je funkce n-proměnných, $A \in D(f)$ a $\mathbf{u}^0$ je jednotkový vektor v $\mathbb{E}_n$. Existuje-li konečná limita*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(A + h\mathbf{u}^0) - f(A)}{h},$$

pak její hodnotu nazýváme derivací funkce f ve směru $\mathbf{u}^0$ v bodě A (nebo také směrovou derivací f v bodě A podle $\mathbf{u}^0$) a označujeme ji

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}^0}(A).$$

Není nutné omezovat se na směry definované jednotkovým vektorem. Je-li $\mathbf{u}$ nenulový vektor v $\mathbb{E}_n$, pak jednotkový vektor ve směru $\mathbf{u}$ dostaneme jako $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$.

Derivaci f v bodě A ve směru $\mathbf{u}$ definujeme rovností

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(A) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}^0}(A).$$

Výpočet derivace funkce f ve směru $\mathbf{u}$

Je-li f diferencovatelná funkce v bodě A a $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ je nenulový vektor v $\mathbb{E}_n$, derivace funkce f ve směru $\mathbf{u}$ v bodě A existuje a

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(A) = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot u_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot u_n \right).$$

Tento vzorec lze přepsat jako

Věta. *Předpokládejme, že funkce f (n proměnných) je diferencovatelná v bodě $A \in \mathbb{E}_n$. Předpokládejme dále, že $\mathbf{u}$ je nenulový vektor v $\mathbb{E}_n$. Pak derivace funkce f v bodě A ve směru $\mathbf{u}$ existuje a je možné ji vypočítat pomocí formule*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(A) = \frac{\operatorname{grad} f(A) \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \qquad \left(= \operatorname{grad} f(A) \cdot \mathbf{u}^0, \quad \textit{kde } \mathbf{u}^0 = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right).$$

Příklady.

Gradient a derivace ve směru

Je skutečně gradient směrem, ve kterém funkce nejrychleji roste?

Na tabuli.

Gradient a derivace ve směru

Je skutečně gradient směrem, ve kterém funkce nejrychleji roste?

Na tabuli.

Tečna a normála k izokřivce, tečná rovina a normála k izoploše

Na tabuli.

Příklady (zkouškové)

1. a) Napište (a zdůvodněte), ve kterých bodech $[x, y] \in \mathbb{E}_2$ je funkce $f(x, y) = \sqrt{x + y^2 - 4}$ diferencovatelná. Množinu těchto bodů načrtněte.

   b) Napište gradient a diferenciál funkce f v bodě $A = [4, -2]$.

   c) Pomocí diferenciálu nebo pomocí rovnice tečné roviny vypočítejte přibližnou hodnotu funkce f v bodě $[4.2, -1.8]$.

   d) Určete jednotkový vektor $\vec{s}$, v jehož směru funkce f v bodě A nejrychleji roste. Vypočítejte derivaci funkce f v bodě A v tomto směru.

Příklady (zkouškové)

2. a) Vyjádřete a načrtněte množinu, ve které je funkce funkce $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$ diferencovatelná. Zdůvodněte !

   b) Určete gradient funkce f v bodě $A = [1,\ -2]$.

   c) Vypočítejte derivaci funkce f v bodě $A = [1,\ -2]$ ve směru $\vec{s} = (2,\ 1)$. Udává tento vektor $\vec{s}$ směr, ve kterém funkce f v bodě A nejrychleji klesá? Odpověď zdůvodněte!

   d) Napište rovnici izokřivky této funkce, tj. rovnici $f(x, y) = k$ pro $k = 0$ a izokřivku načrtněte.