Matematika II – přednáška 5

Co bude dneska?

Shrnutí toho co bylo.

Parciální derivace vyšších řádů.

Diferenciání operátory. Divergence vektorového pole. Rotace vektorového pole.

P.S.: Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska05.pdf$
Slidy nenahrazují skripta ani zápisky ani účast na přednášce a jsou pouze pro osobní potřeby.

Funkce f má spojité parciální derivace podle všech proměnných v bodě A.

$$\Downarrow$$

f je diferencovatelná v bodě A. $\Longrightarrow$

1. *f je spojitá v bodě A.*
2. *Existuje tečná rovina ke grafu funkce f v bodě A.*
3. *Existuje diferenciál funkce f v bodě A.*
4. *Derivace f ve směru daném nenulovým vektorem $\mathbf{u}$ existuje.*
5. *Gradient funkce f v bodě A má geometrický a fyzikální význam, popsaný dříve.*

Parciální derivace vyšších řádů

Definice (parciální derivace vyšších řádů). *Předpokládejme, že f je funkce n proměnných $x_1, \dots, x_n$ a $i \in \{1; \dots; n\}$. Připomeňme, že funkce $\partial f / \partial x_i$ je parciální derivace f podle x_i.*

Je-li $j \in \{1; \dots; n\}$, pak parciální derivaci podle x_j funkce $\partial f / \partial x_i$ nazýváme parciální derivací 2. řádu (nebo druhou parciální derivací) funkce f podle x_j a x_i.

Označujeme ji

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i} \quad \left(\text{případně} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \text{pokud } j = i\right).$$

Pro definiční obory platí inkluze $\quad D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}\right) \subset D\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \subset D(f).$

Parciální derivace vyšších (třetího, čtvrtého a dalších) řádů jsou definovány obdobně.

Příklady na tabuli.

Záměna pořadí parciálních derivací

V minulém příkladu vyšlo, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,.$$

Je to tak vždy?

Záměna pořadí parciálních derivací

V minulém příkladu vyšlo, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}.$$

Je to tak vždy?

Ne vždy, ale skoro vždy, když je funkce ”rozumná”.

Př.

Věta (o záměně pořadí parciálních derivací). *Předpokládejme, že* f *je funkce* n *proměnných* $x_1, \ \dots, \ x_n$ *a* $i, j \in \{1; \dots ; n\}$. *Jestliže obě druhé parciální derivace* $\partial^2 f / \partial x_i \, \partial x_j$ *a* $\partial^2 f / \partial x_j \, \partial x_i$ *existují v bodě* $X = [x_1, \dots, x_n]$ *a alespoň jedna z nich je v bodě* X *spojitá, pak*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}(X).$$

Příklady na PD na tabuli.

Operátor nabla

Definice (operátor nabla). *Symbolem ∇ označujeme vektorový operátor, nazývaný operátor nabla, jehož souřadnicemi jsou postupně parciální derivace podle x, y a z:*

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Operátor nabla se používá k označení různých vektorových i skalárních polí. Například gradient skalárního pole φ v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$ je vektorové pole:

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right).$$

Divergence vektorového pole

Definice (divergence vektorového pole). *Nechť* $\mathbf{f} = (U, V, W)$ *je vektorové pole v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$. *Divergencí* $\mathbf{f}$ *nazýváme skalární pole, které označujeme* $\operatorname{div} \mathbf{f}$ *a které definujeme rovnicí*

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$$

(ve všech bodech $[x, y, z] \in D$*, ve kterých má pravá strana smysl).*

Pomocí operátoru nabla můžeme divergenci zapsat: $\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f}$.

Příklady na tabuli.

Rotace vektorového pole

Definice (rotace vektorového pole). *Nechť* $\mathbf{f} = (U, V, W)$ *je vektorové pole v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$. *Rotací* $\mathbf{f}$ *nazýváme vektorové pole, které označujeme* $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ *a které definujeme rovnicí*

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} \;=\; \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z},\; \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x},\; \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

(ve všech bodech $[x, y, z] \in D$*, ve kterých má pravá strana smysl).*

Pomocí operátoru nabla lze rotaci vyjádřit:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} \;=\; \nabla \times \mathbf{f} \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}, & \dfrac{\partial}{\partial y}, & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ U, & V, & W \end{vmatrix}.$$

”Determinant”na pravé není determinantem přesně v tom smyslu, v jakém jej známe. Je to však užitečné schéma, pro výpočet rotace. Příklady na tabuli.

Je-li φ skalární pole a $\mathbf{f}$ vektorové pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$ a mají-li obě pole v D druhé parciální derivace, pak

$$\begin{aligned} \text{rot grad}\,\varphi &= \mathbf{0}, \\ \text{div rot}\,\mathbf{f} &= 0. \end{aligned}$$