Matematika II – přednáška 6

Co bude dneska?

Lokální extrémy funkcí dvou proměnných.

Nutná podmínka, postačující podmínky pro existenci extrému.

Globální (absolutní) extrémy. Vázané extrémy.

P.S.: Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska06.pdf$
Slidy nenahrazují skripta ani zápisky ani účast na přednášce a jsou pouze pro osobní potřeby.

Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Definice (lokální extrémy). *Nechť f je funkce n proměnných a $A \in D(f)$. Říkáme, že funkce f má v bodě A lokální maximum, existuje-li prstencové okolí $P(A) \subset D(f)$ takové, že $\forall X \in P(A): \ f(X) \leq f(A)$.*

Podobně, funkce f má v bodě A lokální minimum, existuje-li prstencové okolí $P(A)$ takové, že $\forall X \in P(A): \ f(X) \geq f(A)$.

Lokální maximum a lokální minimum se souhrnně nazývají lokální extrémy.

Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Definice (lokální extrémy). *Nechť f je funkce n proměnných a $A \in D(f)$. Říkáme, že funkce f má v bodě A lokální maximum, existuje-li prstencové okolí $P(A) \subset D(f)$ takové, že $\forall X \in P(A): \; f(X) \leq f(A)$.*
Podobně, funkce f má v bodě A lokální minimum, existuje-li prstencové okolí $P(A)$ takové, že $\forall X \in P(A): \; f(X) \geq f(A)$.
Lokální maximum a lokální minimum se souhrnně nazývají lokální extrémy.

Změníme-li nerovnosti v definici lokálních extrémů na ostré, získáme definici tzv. *ostrých lokálních extrémů*:

Říkáme, že funkce f má v bodě A *ostré lokální maximum* (respektive *ostré lokální minimum*), existuje-li prstencové okolí $P(A) \subset D(f)$ takové, že $\forall X \in P(A): \; f(X) < f(A)$ (respektive $\forall X \in P(A): \; f(X) > f(A)$).

Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému

Věta (nutná podmínka pro existenci lokálního extrému). *Nechť funkce f, n proměnných, je diferencovatelná v bodě A. Má-li f v bodě A lokální extrém, pak*

$$\operatorname{grad} f(A) = \mathbf{0}.$$

Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému

Věta (nutná podmínka pro existenci lokálního extrému). *Nechť funkce f, n proměnných, je diferencovatelná v bodě A. Má-li f v bodě A lokální extrém, pak*

$$\operatorname{grad} f(A) = \mathbf{0}.$$

Poznámka: Všimněte si, že tato podmínka není omezená na funkci dvou proměnných. Je to tedy bod, kde je tečná rovina (nadrovina) ”vodorovná”.

Definice (kritický bod). *Uvažujeme-li i funkce, které nejsou v bodě A diferencovatelné, můžeme konstatovat: Funkce f (n proměnných) může mít v bodě $A \in \mathbb{E}_n$ lokální extrém pouze v případě, že*

i) *f je diferencovatelná v bodě A a* $\operatorname{grad} f(A) = \mathbf{0}$,

ii) *nebo f není diferencovatelná v bodě A.*

Bod A, který vyhovuje podmínce i) nebo podmínce ii), se nazývá *kritický bod* funkce f. (Často se také používá název *stacionární bod*.)

Př: Hledáme kritické body funkce: $f(x, y) = x^3 + y^3 + \frac{9}{2}x^2 - 3y - 12x$.

Označme

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) \end{pmatrix}.$$

A dále

$$\Delta_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), \qquad \Delta_2(A) = \det \mathcal{M} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) \end{vmatrix}.$$

Věta (postačující podmínky pro lokální extrémy). *Předpokládejme, že* $y = f(x_1, x_2)$ *je funkce dvou proměnných, která má první i druhé parciální derivace spojité v bodě* A *a* $\operatorname{grad} f(A) = \mathbf{0}$. *Pak platí:*

a) Jestliže $\Delta_1(A) > 0$ *a* $\Delta_2(A) > 0$, *má funkce* f *v bodě* A *ostré lokální minimum.*

b) Jestliže $\Delta_1(A) < 0$ *a* $\Delta_2(A) > 0$, *má funkce* f *v bodě* A *ostré lokální maximum.*

c) Je-li $\Delta_2(A) < 0$, *pak* f *nemá v bodě* A *lokální extrém.*

Pokračování předchozího příkladu.

Pozn.: -”, vyšší dimenze.

Definice (maximum a minimum funkce na množině). *Nechť f je funkce n proměnných a $M \subset D(f)$. Říkáme, že f nabývá v bodě $A \in M$ svého maxima na množině M, jestliže $\forall\, X \in M \;:\; f(X) \leq f(A)$. Píšeme: $f(A) = \max\limits_{X \in M} f(X)$ nebo jenom $f(A) = \max\limits_{M} f$, respektive $f(A) = \max_M f$.*

Maximum funkce f na celém svém definičním oboru značíme krátce $\max f$.

Podobně můžeme definovat i minimum funkce f na množině M. Značíme je $\min\limits_{X \in M} f(X)$ nebo jenom $\min\limits_{M} f$, respektive $\min_M f$. Minimum funkce f na celém definičním oboru $D(f)$ značíme krátce $\min f$.

Maximum a minimum funkce f na množině M nazýváme souhrnně extrémy funkce f na množině M. Používáme často názvy absolutní extrémy a globální extrémy.

Jako je tomu u funkcí jedné proměnné, i zde se může stát, že některý z extrémů (nebo dokonce oba) neexistuje nebo, že je jich více.

Věta (o existenci absolutních extrémů funkce na množině). *Je-li* $M \subset \mathbb{E}_n$ *neprázdná, omezená a uzavřená množina a je-li funkce* f *spojitá na* M*, pak v množině* M *existují body* X_1 *a* X_2 *takové, že* $f(X_1) = \max_M f$ *a* $f(X_2) = \min_M f$.

Tj. spojitá funkce na neprázdné množině M, která je omezená a uzavřená, nabývá maxima a minima.

Věta (o existenci absolutních extrémů funkce na množině). *Je-li* $M \subset \mathbb{E}_n$ *neprázdná, omezená a uzavřená množina a je-li funkce* f *spojitá na* M, *pak v množině* M *existují body* X_1 *a* X_2 *takové, že* $f(X_1) = \max_M f$ *a* $f(X_2) = \min_M f$.

Tj. spojitá funkce na neprázdné množině M, která je omezená a uzavřená, nabývá maxima a minima.

Jak hledat absolutní extrémy. Funkce f může svých absolutních extrémů na množině M nabývat (když existují)

a) v bodech $X \in M^\circ$, ve kterých je f diferencovatelná a má tam všechny parciální derivace rovny nule,

b) nebo v bodech $X \in M^\circ$, ve kterých funkce f není diferencovatelná,

c) nebo v bodech $X \in \partial M$.

(M° je vnitřek a ∂M je hranice množiny M. Body, vyhovující podmínkám a) a b), jsou kritické body funkce f v M°.) Tedy:

1. *Najdeme body* $X \in M^\circ$, *ve kterých je funkce* f *diferencovatelná a má nulové parciální derivace.*
2. *Najdeme body* $X \in M^\circ$, *ve kterých funkce* f *není diferencovatelná.*
3. *Vyšetříme, ve kterých bodech* $X \in \partial M$ *může nabývat funkce* f *svých absolutních extrémů na hranici množiny* M.
4. *Nakonec vypočítáme hodnoty funkce* f *ve všech získaných bodech. Největší hodnota je rovna* $\max_M f$ *a nejmenší hodnota je rovna* $\min_M f$.

Příklady na tabuli.