

## MATEMATIKA II - vybrané úlohy ze zkoušek (2014) doplňené o další úlohy

Nalezené nesrovnalosti ve výsledcích, jakož i připomínky k tomuto souboru sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz ).

1. část DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH
2. část ( Dvojný a trojný integrál) bude vydána v polovině března 2014
3. část ( Křivkový a plošný integrál, potenciál) bude vydána v polovině dubna 2014

Některé úlohy jsou převzaty ze skript [1] a [2]. Jedná se o **základní** doporučenou literaturu pro předmět Matematika II, a to v úrovni A i B.

[1] J. Neustupa: **Matematika II**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2008.

[2] E. Brožíková, M. Kittlerová: **Sbírka příkladů z Matematiky II**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2003, dotisk 2007. (*Sbírka řešených i neřešených příkladů* )

Pro zájemce o **další procvičení základních znalostí a dovedností** jsou na webových stránkách ÚTM pod předmětem Matematika II dostupné soubory "Diferenciální počet (základní úlohy)" a "Implicitní funkce" ( bude na začátku března). Podstatná část těchto úloh odpovídá i požadavkům zkoušky úrovně B.

Následující výčet nelze chápat jako jednoznačné zařazení uvedené úlohy do zkoušky úrovně A (alfa), resp. úrovně B, ale jako **orientační** rozlišení.

Úlohy č. 1 až 4 ( včetně variant), 5a), b) vyžadují základní znalosti, proto jejich části odpovídající požadavkům zkoušky **úrovně B** jsou použitelné i pro tuto zkoušku.

Z okruhu Implicitní funkce odpovídají požadavkům zkoušky úrovně B svým zaměřením a náročností např. úlohy 7 a 8 a dále např. úlohy 9 a 10 (bez druhé derivace) a úloha č. 12 (bez varianty 12.1). Z okruhu Lokální extrémy odpovídají zkoušce B úlohy č. 15 až 20.

Pokud jsou vyžadovány obrázky, pak je stačí načrtnout, musí však obsahovat vše podstatné: popis os, měřítko, popis křivek (ploch) a vyznačení bodů, které jsou pro řešení úlohy důležité, např. průsečíky křivek.

### 1. Definiční obor, izokřivky, parciální derivace, gradient, diferencovatelnost, tečná rovina, diferenciál, derivace ve směru

V úlohách 1 a 2, kromě formulovaných úkolů, nejprve určete ( zapište) definiční obor  $D(f)$  Dále pak pojmenujte a načrtněte v  $\mathbb{E}_3$  plochu, která je grafem dané funkce. Pro lepší představu o řešené úloze si do obrázku můžete též zakreslit další vyšetřované útvary – body, vektory, případně i tečnou rovinu.

1. a) Napište postačující podmínku pro diferencovatelnost funkce  $n$ -proměnných v otevřené mn.  $M \subset \mathbb{E}_n$ . Určete a načrtněte v  $\mathbb{E}_2$  množinu  $D$ , ve které je funkce  $z = f(x, y) = \sqrt{18 - x^2 - 2y^2}$  diferencovatelná.
- b) Vypočítejte derivaci funkce  $f$  v bodě  $A = [1, -2]$  ve směru, který je určen vektorem  $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$ , kde bod  $B = [0, 0]$ . Popište chování funkce  $f$  v bodě  $A$  v daném směru (funkce roste, resp. klesá, jak rychle (odhad)).
- c) Napište rovnici tečné roviny a parametrické vyjádření normály ke grafu funkce  $f$  v bodě dotyku  $[1, -2, ?]$ .
- d) Napište rovnice izokřivek (tj.  $f(x, y) = k$ ) této funkce pro  $k = 0, k = 3$ . Izokřivky načrtněte.
2. a) Napište (a **zdůvodněte**), ve kterých bodech  $[x, y] \in \mathbb{E}_2$  je funkce  $z = f(x, y) = -\sqrt{5y - x^2}$  diferencovatelná. Množinu těchto bodů načrtněte.
- b) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu dané funkce v bodě  $A = [4, 5]$ . Popište chování dané funkce v bodě  $A$  (funkce roste, resp. klesá, v jakém směru a odhadněte, jak rychle).
- c) Určete směr  $\vec{s}$ , ve kterém funkce  $f$  v bodě  $A$  nejrychleji klesá. Vypočítejte derivaci funkce  $f$  v bodě  $A$  v tomto směru  $\vec{s}$ .
- d) Napište diferenciál funkce  $f$  v bodě  $A = [4, 5]$  a jeho pomocí vypočítejte přibližně hodnotu funkce  $f$  v bodě  $[4.3, 5.3]$ .
3. a) Určete (se zdůvodněním) a načrtněte v  $\mathbb{E}_2$  množinu, ve které je funkce  $z = f(x, y) = \ln(xy - 4)$  diferencovatelná.
- b) Určete gradient této funkce  $f$  v bodě  $A = [-2, -4]$ . Popište, co vypočtený vektor udává. Určete velikost derivace zadané funkce v bodě  $A$  ve směru gradientu.
- c) Určete vektor  $\vec{s}$ , v jehož směru je derivace dané funkce v bodě  $A$  nulová. Nulovou hodnotu derivace ověřte výpočtem.
- d) Napište rovnice izokřivek této funkce pro  $k = 0$  a pro  $k = \ln 4$ . Izokřivky načrtněte (tj. křivky  $f(x, y) = k$ ).

4. Další varianty úloh 1, 2 a 3 s jinou funkcí  $f$  a bodem  $A$  (případně si sami změňte bod  $B$ ).  
Úlohy 4.6 až 4.11 řešte bez izokřivek, úlohy 4.4 až 4.11 bez grafu.

4.1.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 9y^2 - 36}$   $A = [-7, 1]$   
 4.2.  $f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$   $A = [-3, 4]$   
 4.3.  $f(x, y) = \sqrt{x - y^2 + 2}$   $A = [3, -1]$   
 4.4.  $f(x, y) = \ln(3x - y + 2)$   $A = [-1, -2]$   
 4.5.  $f(x, y) = \frac{3x - 2y}{y}$   $A = [-1, 2]$   
 4.6.  $f(x, y) = \cos x + \frac{1}{2} \sin y - 3$   $A = [0, \pi/2]$   
 4.7.  $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}} - x \sqrt{y}$   $A = [4, 1]$   
 4.8.  $f(x, y) = \ln(xy^2)$   $A = [2, -1]$   
 4.9.  $f(x, y) = (x^2 + y) e^{-2x}$   $A = [0, 1]$   
 4.10.  $f(x, y) = \frac{xy^2}{2} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$   $A = [1, 1]$   
 4.11.  $f(x, y) = \ln(xy) - \sqrt{x^2 + y^2 - 20}$   $A = [-2, -5]$

5. a) Vypočítejte derivaci funkce  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 6xy + 2x$  v bodě  $A = [-1, 2]$  ve směru určeném vektorem  $\vec{s} = (2, -2)$ . Je to směr maximálního růstu funkce  $f$  v bodě  $A$ ? Zdůvodněte!  
 b) Určete všechny body, v nichž je gradient funkce  $f$  roven nulovému vektoru.  
 c) Najděte dotykový bod a rovnici tečné roviny  $\tau$  ke grafu funkce  $f$  rovnoběžné s rovinou  $\rho: 4x + 6y - z + 3 = 0$ .
6. a) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce  $z = f(x, y) = y^2 \sin(x^2 - y^2)$ .  
 b) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce  $f$  v bodě dotyku  $[1, 1, ?]$ . Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty funkce  $f$  v bodě  $[0.9, 1.1]$ .  
 c) Dokažte, že daná funkce vyhovuje pro všechna  $[x, y] \in \mathbb{E}_2$  diferenciální rovnici  $y^2 \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y} = 2xz$ .

**Výsledky: 1.** Graf: "horní" část (tj.  $z \geq 0$ ) elipsoidu  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 18$  a)  $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 18 - x^2 - 2y^2 > 0\}$ , tj. vnitřek elipsy se středem v počátku, poloosy:  $a = 3\sqrt{2}$ ,  $b = 3$ , v množině  $D$  má daná funkce spojité parciální derivace b)  $\operatorname{grad} f(A) = (-1/3, 4/3)$ ,  $\vec{s} = (-1, 2)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = 3\sqrt{5}/5$ , daná funkce v bodě  $A$  v daném směru roste, a to se sklonem asi  $50^\circ$  c)  $\tau: z = 3 - (x - 1)/3 + 4(y + 2)/3$ , po úpravě:  $x - 4y + 3z = 18$ , normála  $n: (x, y, z) = [1, -2, 3] + t(1, -4, 3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  d) Izokřivky (vrstevnice) jsou elipsy:  $x^2 + 2y^2 = 18$  (hranice  $D(f)$ , pro  $k=0$ ), resp.  $x^2 + 2y^2 = 9$  (pro  $k = 3$ ).

**2.** Graf: "dolní" část ( $z \leq 0$ ) rotačního paraboloidu  $y = (x^2 + z^2)/5$ , osa v ose  $y$ .

a) V bodech  $[x, y] \in \mathbb{E}_2: 5y - x^2 > 0$ , tj. vnitřek paraboly s vrcholem v počátku a osou v ose  $y$ , v těchto bodech má daná funkce spojité parciální derivace.

b)  $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 4/3$ , daná funkce v bodě  $A$  v kladném směru osy  $x$  roste, a to se sklonem asi  $50^\circ - 55^\circ$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = -5/6$ , daná funkce v bodě  $A$  v kladném směru osy  $y$  klesá, a to se sklonem asi  $40^\circ$ .

c)  $\vec{s} = -\operatorname{grad} f(A) = (-4/3, 5/6)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = -\|\operatorname{grad} f(A)\| = -\sqrt{89}/6 \doteq -1.6$ , tedy pokles se sklonem téměř  $60^\circ$  d)  $df(A) = \frac{4}{3} dx - \frac{5}{6} dy$ ,  $f(4.3, 5.3) \doteq f(A) + \frac{4}{3} 0.3 - \frac{5}{6} 0.3 = -2.85$ .

**3.** a)  $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : xy - 4 > 0\}$ , v množině  $D$  má daná funkce spojité parciální derivace.  $D$  je otevřená množina ohraničená křivkou  $y = 4/x$ ,  $D = D_1 \cup D_2$  (množina v 1. a 3. kvadrantu) b)  $\operatorname{grad} f(A) = (-1, -1/2)$  udává směr maximálního růstu dané funkce v bodě  $A$  c)  $\vec{s} \perp \operatorname{grad} f(A)$ , např.  $\vec{s} = (1/2, -1)$

d)  $C_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : \ln(xy - 4) = 0\}$ , tj. křivka  $y = 5/x$ ,  $C_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : \ln(xy - 4) = \ln 4\}$ , tj. křivka  $y = 8/x$ .

**4.1.** Graf: "horní" část ( $z \geq 0$ ) dvoudílného hyperboloidu  $x^2 - 9y^2 - z^2 = 36$ , vrcholy v bodech  $[6, 0, 0]$ ,  $[-6, 0, 0]$ .

**4.2.** Graf: "dolní" část rotační kuželové plochy, osa v ose  $z$ , vrchol v bodě  $[0, 0, 4]$ .

**4.3.** Graf: "horní" část ( $z \geq 0$ ) rotačního paraboloidu  $x = y^2 + z^2 - 2$ , osa v ose  $x$ , vrchol  $[-2, 0, 0]$ .

**5.** a)  $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = 11\sqrt{2}$ . Není to směr maximálního růstu dané funkce v bodě  $A$ , to je směr  $\operatorname{grad} f(A) = (12, -10)$

b)  $x = -1/10$ ,  $y = -3/10$  c) viz [2], př. 140:  $T = [1, 0, 3]$ ,  $4x + 6y - z - 1 = 0$ .

**6.** a)  $f'_x(x, y) = 2xy^2 \cos(x^2 - y^2)$ ,  $f'_y(x, y) = 2y \sin(x^2 - y^2) - 2y^3 \cos(x^2 - y^2)$ .

b)  $z = 2x - 2y$ ,  $f(0.9, 1.1) \doteq -0.4$ .

## 2. Implicitní funkce

### 2.1. Funkce jedné proměnné $y = f(x)$ definovaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$

7. a) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce  $F(x, y) = x^2y - x^3 - 2 \cdot \sqrt{y} + 1$ .  
b) Ověřte, že rovnicí  $F(x, y) = 0$  je v okolí bodu  $[x_0, y_0] = [1, 4]$  implicitně určena funkce  $y = f(x)$ , která má spojitou derivaci  $f'(x)$ .  
c) Určete hodnotu derivace  $f'(1)$  a napište rovnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě dotyku  $[1, 4]$ .  
d) Rovnici tečny užíjte k přibližnému výpočtu hodnoty  $y = f(x)$  v bodě  $x = 0.8$ .
8. Další varianty této úlohy s jinou funkcí  $F$  a bodem  $[x_0, y_0]$ :
- 8.1.  $F(x, y) = ye^x + y^2 - 2x^2y - 2$ ,  $[x_0, y_0] = [0, 1]$ ; výpočet  $f'(0)$ , rovnice tečny a rovnice normály ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $[0, 1]$ , popis chování této funkce v bodě  $x_0 = 0$ , tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad).
- 8.2.  $F(x, y) = x^3 + \frac{y^2}{2} - x^2y - 1$ ,  $[x_0, y_0] = [1, 2]$ ; výpočet  $f'(1)$ , rovnice tečny ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $[1, 2]$ , popis chování této funkce v bodě  $x_0 = 1$ . Pokud víte, že  $f''(1) = 1$ , načrtněte do jednoho obrázku tečnu a tvar grafu funkce  $y = f(x)$  v okolí bodu  $x_0 = 1$ .
- Následující čtyři úlohy mají společnou část
- a) Napište **postačující** podmínky pro existenci spojité funkce  $y = f(x)$  určené implicitně rovnicí  $F(x, y) = 0$  v okolí bodu  $[x_0, y_0]$  a pro spojitost její derivace  $f'(x)$  v okolí bodu  $x = x_0$ .
9. b) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí  $F(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^4 - 1 = 0$  je implicitně určena funkce  $y = f(x)$ , jejíž graf prochází bodem  $[x_0, y_0] = [2, -1]$  a která má spojitou 1. a 2. derivaci v okolí bodu  $x_0 = 2$ .  
c) Určete hodnoty derivací  $f'(2)$  a  $f''(2)$ .  
d) Napište Taylorův polynom 2. stupně  $T_2(x)$  funkce  $f$  se středem v bodě  $x_0 = 2$ . Pomocí  $T_2(x)$  pak vypočítejte přibližně hodnotu  $f(x)$  pro  $x = 2.2$ .
10. b) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí  $F(x, y) = x^3 + xy^2 + xy - 7 = 0$  je v okolí bodu  $x_0 = 1$  definována diferencovatelná **kladná** funkce  $y = f(x)$ . Určete hodnotu  $y_0 = f(x_0)$ .  
c) Vypočítejte hodnotu derivace  $f'(1)$  a napište rovnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $[x_0, y_0]$ .  
d) Zjistěte, zda je funkce  $f$  konvexní nebo konkávní v okolí bodu  $x_0 = 1$ . Načrtněte tvar grafu funkce  $f$  v okolí bodu  $[x_0, y_0]$ .
11. b) Ověřte, že rovnicí  $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - y = 0$  je implicitně určena diferencovatelná funkce  $y = f(x)$ , jejíž graf prochází bodem  $[x_0, y_0] = [1, 1]$ .  
c) Vyšetřete, zda funkce  $y = f(x)$  má v bodě  $x_0 = 1$  lokální extrém. Pokud ano, určete, zda se jedná o lokální maximum nebo lokální minimum. (Zdůvodněte).
12. b) Ověřte, že rovnicí  $F(x, y) = \ln(x + y) + 2x + y = 0$  je implicitně určena funkce  $y = f(x)$ , která má spojitou derivaci v okolí bodu  $x_0 = -1$  a splňuje podmínku  $f(-1) = 2$ .  
c) Určete hodnotu derivace  $f'(-1)$ . Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu funkce  $f$  v bodě  $[-1, 2]$ .  
d) Rovnici tečny užíjte k výpočtu přibližné hodnoty funkce  $f$  v bodě  $x = -0.9$ .
- 12.1. Varianta předcházející úlohy:  $F(x, y) = xye^{x-y} - \frac{2}{e} = 0$ ,  $x_0 = 1$ ,  $f(1) = 2$ , tečna ke grafu funkce  $f$  v bodě  $[1, 2]$ , výpočet přibližné hodnoty funkce  $f$  v bodě  $x = 1.1$ , výpočet hodnoty 2. derivace  $f''(1)$ .

### 2.2. Funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ definovaná implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$

13. a) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí  $F(x, y, z) = z^3 + 3x^2z - 2xy = 0$  je implicitně určena funkce  $z = f(x, y)$ , jejíž graf prochází bodem  $A = [-1, -2, 1]$  a která má spojité parciální derivace 1. řádu v okolí bodu  $[x_0, y_0] = [-1, -2]$ .  
b) Určete hodnoty derivací  $\frac{\partial f}{\partial x}$  a  $\frac{\partial f}{\partial y}$  v bodě  $[-1, -2]$ . Napište gradient funkce  $f$  v bodě  $[-1, -2]$ .  
c) Napište rovnici tečné roviny  $\tau$  a rovnici normály  $n$  ke grafu funkce  $f$  v bodě  $A$  (tj. též k ploše popsané rovnicí  $F(x, y, z) = z^3 + 3x^2z - 2xy = 0$ ).  
d) Rovnici tečné roviny užíjte k výpočtu přibližné hodnoty funkce  $f$  v bodě  $[-0.9, -2.1]$ .
14. a) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí  $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$  je implicitně určena funkce  $z = f(x, y)$ , jejíž graf prochází bodem  $A = [1, 2, -1]$  a která má spojité parciální derivace 1. řádu v okolí bodu  $[x_0, y_0] = [1, 2]$ .  
b) Určete hodnoty parciálních derivací  $\frac{\partial f}{\partial x}$  a  $\frac{\partial f}{\partial y}$  v bodě  $[1, 2]$ .  
c) Určete derivaci funkce  $f$  v bodě  $[1, 2]$  ve směru  $\vec{u} = (-1, 2)$ .

d) Napište směr  $\vec{s}$ , ve kterém funkce  $f$  v bodě  $[1, 2]$  nejrychleji klesá. Vypočítejte derivaci funkce  $f$  v bodě  $[1, 2]$  v tomto směru  $\vec{s}$ .

Výsledky: **7.**  $F'_x(x, y) = 2xy - 3x^2$ ,  $F'_y(x, y) = x^2 - \frac{1}{\sqrt{y}}$ ,  $f'(1) = -10$ , tečna:  $y = 4 - 10(x - 1)$ ,  $f(0.8) \doteq 6$ .

**8.1**  $F'_x(x, y) = ye^x - 4xy$ ,  $F'_y(x, y) = e^x + 2y - 2x^2$ ,  $f'(0) = -1/3$ , tečna:  $y = 1 - x/3$ , normála:  $y = 1 + 3x$ , funkce  $f$  je v bodě  $x_0 = 1$  klesající, sklon tečny je menší než  $30^\circ$ , přesněji asi  $20^\circ$ .

**8.2**  $F'_x(x, y) = 3x^2 - 2xy$ ,  $F'_y(x, y) = y - x^2$ ,  $f'(1) = 1$ , tečna:  $y = x + 1$ , funkce  $f$  je v bodě  $x_0 = 1$  rostoucí, sklon tečny je  $45^\circ$ . **9.** c)  $f'(2) = f''(2) = -1$  d)  $T_2(x) = 1 - x - (x - 2)^2/2$ ,  $f(2.2) = -1.22$ . **10.** b)  $y_0 = 2$  c)  $f'(1) = -9/5$ , tečna:  $y = 2 - \frac{9}{5}(x - 1)$  d)  $f''(1) = 138/125$ ,  $f$  je konvexní. **11.** c)  $f'(1) = 0$ ,  $f''(1) = -2$ , funkce  $f$  má v bodě  $x_0 = 1$  lokální maximum.

**12.** viz [2], př. 195,  $f'(1) = -3/2$ . **12.1**  $F'_x(x, y) = (y + xy)e^{x-y}$ ,  $F'_y(x, y) = (x - xy)e^{x-y}$ ,  $f'(x) = -\frac{y + xy}{x - xy}$ ,  $f'(1) = 4$ , tečna:  $y = 2 + 4(x - 1)$ ,  $f(1.1) \doteq 2.4$ ,  $f''(1) = -10$ .

**13.** a), b) viz [2], př. 187 c)  $\tau : x - y - 3z + 2 = 0$ , normála  $n : (x, y, z) = [-1, -2, 1] + t(1, -1, -3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Pozn. Tečnou rovinu k ploše  $F(x, y, z) = 0$  lze určit též užitím vztahu  $\text{grad } F(A) \cdot (X - A) = 0$ .

**14.** viz [2], př. 197 b)  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -1/5$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = -11/5$  c)  $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 2) = -21\sqrt{5}/25$  d)  $\vec{s} = -\text{grad}f(1, 2) = (1/5, 11/5)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1, 2) = -\sqrt{122}/5$ .

### 3. Extrémy funkcí dvou proměnných

V následujících úlohách

a) Napište nutnou podmínku pro lokální extrém funkce  $n$ -proměnných v bodě  $A$ . Napište postačující podmínky pro lokální minimum (resp. maximum) funkce  $f(x, y)$  v bodě  $A$ .

b) Vyšetřete **lokální extrémy** dané funkce  $f$ , tj. určete jejich polohu, typ a funkční hodnotu.

15.  $f(x, y) = x^2 + 12y^2 - 6xy + 4x$

21.  $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

16.  $f(x, y) = x^3 + y^2 - 12x + 6y$

22.  $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$

17.  $f(x, y) = 2y - y^2 - xe^x$

23.  $f(x, y) = x^3 + y^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x - 3y$

18.  $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2x^2 - 2xy + 6$

24.  $f(x, y) = x^2 + y - x\sqrt{y} - 6x + 12$

19.  $f(x, y) = x^3 + 3y^2 - 6xy - 9x + 8$

25.  $f(x, y) = e^{x/2}(x + y^2)$

20.  $f(x, y) = x^2 + 2x + y^4 - 4y + 7$

26.  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6 \ln x$

Výsledky: **15.**  $f_{\min}(-8, -2) = -16$ . **16.**  $f_{\min}(2, -3) = -25$ , v bodě  $[-2, -3]$  není extrém.

**17.**  $f_{\max}(-1, 1) = 1 + 1/e$ . **18.**  $f_{\min}(2, 2) = 2$ , v bodě  $[0, 0]$  není extrém.

**19.**  $f_{\min}(3, 3) = -19$ , v bodě  $[-1, -1]$  není extrém. **20.**  $f_{\min}(-1, 1) = 3$ . **21.**  $f_{\min}(5, 2) = 30$ .

**22.-25.** viz [2], odst. II.11. **26.**  $f_{\min}(2, -1) = 3 - 6 \ln 2$ , bod  $[-2, 1] \notin D(f)$ .

27. a) Vyšetřete lokální extrémy funkce  $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy + 3x + y + 1$ .

b) Zdůvodněte existenci a najděte **absolutní extrémy** této funkce na úsečce  $AB$ ,

kde  $A = [0, 2]$ ,  $B = [1, 1]$ .

[ a) lokální  $f_{\min}(-1, -1) = -1$ , b)  $f_{\min}(1/2, 3/2) = 6$ ,  $f_{\max}(0, 2) = f_{\max}(1, 1) = 7$ ].

V následujících třech úlohách

a) Zdůvodněte **existenci absolutních extrémů** funkce  $f$  na dané množině  $M$ .

b) **Absolutní extrémy** vyšetřete, tj. stanovte jejich polohu a vypočítejte hodnotu maxima i minima funkce  $f$  na množině  $M$ .

28.  $f(x, y) = x^2 + xy - 3x - y$ ,  $M = \{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0 \}$ .  
[  $f_{\min}(0, 3) = -3$ ,  $f_{\max}(0, 0) = f_{\max}(3, 0) = 0$ ].

29.  $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2$ ,  $M = \{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0 \}$  (Pro vyšetření bodů na hranici můžete užít polárních souřadnic, úlohu však lze řešit i bez nich.)  
[  $f_{\min}(1, 0) = -1$ ,  $f_{\max}(-3, 0) = 15$ ].

30.  $f(x, y) = x + \ln x - y^2$ ,  $M = \{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; y = x + 1, 1/4 \leq x \leq 1 \}$ .  
[  $f_{\min}(1, 2) = -3$ ,  $f_{\max}(1/2, 3/2) = -7/4 - \ln 2 \doteq -2, 4$ ,  $f(1/4, 5/4) = -21/16 - \ln 4 \doteq -2, 7$  není extrém ] .