

## MATEMATIKA II - vybrané úlohy ze zkoušek ( 2015) doplňené o další úlohy

Nalezené nesrovnalosti ve výsledcích nebo připomínky k tomuto souboru sdělte laskavě F. Mrázovi ( e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz).

### 2. část DVOJNÝ A TROJNÝ INTEGRÁL

3. část ( Křivkový a plošný integrál, potenciál) bude vydána v polovině dubna 2015

Některé úlohy jsou převzaty ze skript [1] a [2].

[1] J. Neustupa: **Matematika II**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2015.

[2] E. Brožíková, M. Kittlerová: **Sbírka příkladů z Matematiky II**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2003, dotisk 2007. (*Sbírka řešených i neřešených příkladů* )

Následující výčet nelze chápat jako jednoznačné zařazení uvedené úlohy do zkoušky úrovně A, resp. B., ale jako orientační rozlišení. Rozsahem a náročností odpovídají požadavkům zkoušky úrovně B např. úlohy 1 až 11, 13 až 15, 26 a, b, c, 27 a, b, 30 až 36, 37b, 38 až 42, 45a, 45b, 46-49.

Zkoušce úrovně A odpovídají např. úlohy 11 až 25, 26 c, d, e, 27 b, c, 28 a 29, 34 až 36, 37c, 42 až 55.

Obrazky stačí načrtnout, musí však obsahovat vše podstatné: popis os, měřítko, **popis** křivek (ploch) a vyznačení bodů, které jsou pro řešení úlohy důležité ( průsečíky křivek ap.)

### Dvojný integrál

V následujících úlohách je omezená množina  $D \subset \mathbb{E}_2$  zadána nerovnicemi nebo hraničními křivkami.

- a) Načrtněte množinu  $D$ .
- b) Ověřte splnění předpokladů pro použití Fubiniovy věty (spojitost funkce na dané množině a její **vyjádření ve tvaru elementárního oboru integrace** vzhledem ke vhodně zvolené ose). Vypočítejte  $\iint_D f(x, y) dx dy$ .
- c) V úlohách 1, 3-12, 15, 17, 19 - 25 uveďte alespoň **dva příklady možného fyzikálního významu** daného integrálu. Uveďte přesně, zda se jedná o hmotnost ( při jaké hustotě), statický moment nebo moment setrvačnosti ( při jaké hustotě a vzhledem k jakému bodu nebo přímce).
- d) V úlohách 2, 5, 7, 10-12, 18 a 21-24 se pokuste představit si, slovně popsat a případně i načrtnout **těleso v  $\mathbb{E}_3$ , jehož objem je roven hodnotě daného integrálu.**

- |                                                                                             |                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. a) $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x + 1\}$              | b) $f(x, y) = x^2 y$                |
| 2. a) $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x, y = 2x, x = 2$               | b) $f(x, y) = x + y$                |
| 3. a) $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x = 1$ | b) $f(x, y) = 2xy$                  |
| 4. a) $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x/2, y = 3x, y = 2$             | b) $f(x, y) = x\sqrt{y}$            |
| 5. a) $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x^2, y = \sqrt{x}$              | b) $f(x, y) = x$                    |
| 6. a) $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x \geq 0, y \leq x + 2, y \geq x^2\}$                 | b) $f(x, y) = 2x(y + 1)$            |
| 7. a) $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$               | b) $f(x, y) = xy$                   |
| 8. a) $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, x \geq 0\}$     | b) $f(x, y) = xy^2$                 |
| 9. a) $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x, y = 1/x, y = 2$              | b) $f(x, y) = xy^2$                 |
| 10. a) $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = 2x, y = 2/x, x = 2$            | b) $f(x, y) = xy$                   |
| 11. a) $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x \geq 0, x + y \leq 2, x \leq y^2\}$                | b) $f(x, y) = xy$                   |
| 12. a) $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $x = 1, x = y^2 + 2, y = 0, y = 2,$ | b) $f(x, y) = y/\sqrt{x}$           |
| 13. a) $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x, y = 1/x, x = 3$             | b) $f(x, y) = \sqrt{x}$             |
| 14. a) $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y \geq 0, y \leq 2 - x, x \geq y^2\}$                | b) $f(x, y) = y^2$                  |
| 15. a) $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x + y \leq 1, x + 1 \geq y \geq 0\}$                 | b) $f(x, y) = x^2 + y^2$            |
| 16. a) $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x + y \leq \pi, x - y \leq \pi, x \geq 0\}$          | b) $f(x, y) = \sin(x + y)$          |
| 17. a) $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + 9y^2 \leq 9, x \geq 0\}$                       | b) $f(x, y) = y^2$                  |
| 18. a) $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$                        | b) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ |
| 19. a) $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y \geq x^2, y \leq 12 - x^2\}$                       | b) $f(x, y) =  x $                  |

20. a)  $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + 4y^2 \leq 4, y \geq 0\}$  b)  $f(x, y) = y \sqrt{x^2 + 4y^2}$   
 21. a)  $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y^2 - x^2 \leq 1, 0 \leq x \leq 2, y \geq 0\}$  b)  $f(x, y) = y$   
 22. a)  $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 36x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$  b)  $f(x, y) = xy$   
 23. a)  $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq 0\}$  b)  $f(x, y) = xy$   
 24. a)  $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$  b)  $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$   
 25. a)  $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y \geq \ln x, x \geq 1, y \leq 1\}$  b)  $f(x, y) = 1/x$

V úloze 25 převed'te dvojný integrál oběma způsoby na dvojnásobný (tj. obě pořadí integrace). Pak zvolte jednu z možností a integrál vypočítejte.

*Výsledky:* 1. b) 16/15, c) hmotnost, když  $\rho(x, y) = x^2 y$ ; moment setrvačnosti  $J_y$  (vzhledem k ose  $y$ ), je-li  $\rho(x, y) = y$ ; statický moment  $m_x$  (vzhledem k ose  $x$ ), je-li  $\rho(x, y) = x^2$ . Podobně v dalších úlohách. 2. 20/3 3. 1 4.  $40\sqrt{2}/9$  5. 3/20 6. 52/3 7. b) 2, d) čtvrtina "válce" (v nezáporném oktantu), "horní podstavou" je hyperbolický paraboloid  $z = xy$  (sedlová plocha) 8. 48/5 9. 13/5 10.  $15/2 - 2 \ln 2$  11. 7/24 12.  $4\sqrt{6} - 4 - \frac{4}{3}\sqrt{2}$  13.  $8(1 + \sqrt{3})/5$  14. 13/60 15. b) 1/3, c) moment setrvačnosti  $J_0$  (vzhledem k počátku), je-li  $\rho(x, y) = 1$ ; 16.  $\pi$  17.  $3\pi/8$  18.  $9\pi$  19. 36 20. 2 21. 7/3 22. 9/32 23. 32/3 24.  $\pi(1 - e^{-4})/2$  25. 1/2

26. Načrtněte rovinný obrazec, který je omezen danými křivkami. Určete jeho plošný obsah  $P$ .  
 a)  $y = x, y = x^2 - 2$  [Výsl.:  $P = 9/2$ ]  
 b)  $2x + 2y = 5, xy = 1$  [Výsl.:  $P = 15/8 - \ln 4$ ]  
 c)  $y = x/2, xy = 2, y = 4$  [Výsl.:  $P = 15 - 2 \ln 4$ ]  
 d)  $y = x - 1, y = -1, y = \ln x$  [Výsl.:  $P = 1/2 - 1/e$ ]  
 e)  $y = x, y^2 = x + 2$  [Výsl.:  $P = 9/2$ ]  
 27. V následujících třech úlohách určete hmotnost  $m$  rovinné desky  $D$  při dané plošné hustotě  $\rho(x, y)$ .  
 a)  $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y \leq x + 2, y \geq x^2, x \geq 0\}, \rho(x, y) = xy$  [Výsl.:  $m = 6$ ]  
 b)  $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x \leq 4, x \geq y^2, y \geq 1/x\}, \rho(x, y) = 2x$  [Výsl.:  $m = 94/5$ ]  
 c)  $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\}, \rho(x, y) = y$  [Výsl.:  $m = 1/6$ ]  
 28. a) Určete hmotnost  $m$  homogenní rovinné desky omezené křivkami  $y^2 = 4x + 4, y^2 = -2x + 4$  (konstantní plošná hustota  $\rho$ ). [Výsl.:  $m = 8 \rho$ ]  
 b) Určete těžiště tohoto tělesa. [Výsl.: Statický moment  $M_y = 8\rho/5$ , těžiště  $T = [1/5, 0]$ ]  
 29. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose  $y$  rovinné desky  $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 4x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ , je-li plošná hustota  $\rho(x, y) = y$ . [Výsl.:  $J_y = 1/60$ ]

### Trojný integrál

V následujících sedmi úlohách

- a) načrtněte množinu (těleso)  $D$  v  $\mathbb{E}_3$ . Zakreslete též průmět  $D_{xy}$  tělesa  $D$  do roviny  $z = 0$ . (Všechna daná tělesa mají dolní podstavu v rovině  $z = 0$ ).  
 b) Ověřte předpoklady pro použití Fubiniovy věty. Vypočítejte trojný integrál  $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ .  
 c) Uveďte alespoň dva příklady možného fyzikálního významu daného integrálu. Uveďte, zda se jedná o hmotnost (při jaké hustotě), statický moment či moment setrvačnosti (při jaké hustotě a vzhledem k jakému bodu, přímce nebo rovině).  
 30. a)  $D : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$  b)  $f(x, y, z) = xy$   
 31. a)  $D : x^2 + y^2 \leq 3, 0 \leq z \leq 2$  b)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$   
 32. a)  $D : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 2 - x - y$  b)  $f(x, y, z) = x^2$   
 33. a)  $D : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, 0 \leq z \leq xy$  (stačí průmět  $D_{xy}$ ) b)  $f(x, y, z) = x$   
 34. a)  $D : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, 0 \leq z \leq 4 - x - 2y$  b)  $f(x, y, z) = x^2$   
 35. a)  $D : 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, y \geq 0$  b)  $f(x, y, z) = x^2 y$   
 36. a)  $D : 0 \leq x \leq 3, x \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq xy$  (stačí průmět  $D_{xy}$ ) b)  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2) z$

*Výsledky:* 30. čtyřboký hranol, shora rotační paraboloid: 3/4, 31. válec: b)  $9\pi$  c) hmotnost, když  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$ ; moment setrvačnosti  $J_z$  (vzhledem k ose  $z$ ), je-li  $\rho(x, y, z) = 1$ . Podobně v dalších úlohách. 32. trojboký hranol, shora rovina: 1/5 33. trojboký hranol, shora hyperbolický paraboloid: 1/60 34. 1/4 35. b) 512/105 c) hmotnost, když  $\rho(x, y, z) = x^2 y$ ; moment setrvačnosti  $J_{yz}$  (vzhledem k rovině  $yz$ ), je-li  $\rho(x, y, z) = y$ ; statický moment  $D_{xz}$  (vzhledem k rovině  $xz$ ), je-li  $\rho(x, y, z) = x^2$ . Podobně v dalších úlohách. 36.  $3^7/10$ .

Pokud je v některé z následujících úloh **výpočet objemu**, pak zvažte, zda je nutné (resp. vhodné) počítat trojný integrál, tj.  $V = \int \int \int_D 1 \cdot dx dy dz$  nebo zda stačí využít geometrického významu dvojného integrálu.

37. a) Načrtněte těleso  $D$ :  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$  a jeho průmět  $D_{xy}$  do roviny  $z = 0$ .  
 b) Vypočítejte objem tohoto tělesa.  $[V = 10/3]$   
 c) Vypočítejte hmotnost tohoto tělesa, je-li hustota  $\rho(x, y, z) = x + y$ .  $[m = 19/6]$
38. a) Načrtněte těleso  $D$  a jeho průmět do roviny  $z = 0$ , je-li  $D$  ohraničeno plochami  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $z = 0$ ,  $z = 2$ .  
 b) Vypočítejte hmotnost tohoto tělesa, je-li hustota  $\rho(x, y, z) = z$ .  $[m = 18\pi, D$  je válec]  
 c) Vypočítejte hmotnost, je-li hustota  $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .  $[m = 36\pi]$
39. a) Načrtněte těleso  $D$  a jeho průmět  $D_{xy}$  do roviny  $z = 0$ , je-li  $D$  ohraničeno plochami  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = x^2 + y^2 + 4$ .  
 b) Vypočítejte objem tohoto tělesa.  $[V = 9\pi/2, D$  je "válec", shora rotační paraboloid]
40. a) Načrtněte těleso  $D$ :  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $0 \leq z \leq 4 - x$ . Zakreslete jeho průmět  $D_{xy}$  do roviny  $z = 0$ .  
 b) Vypočítejte objem tohoto tělesa.  $[V = 16\pi, D$  je válec, shora odříznutý rovinou]
41. Vypočítejte objem tělesa  $D$ , které je omezené plochami o rovnicích  $z = x^2 + y^2 + 4$ ,  $z = 3 - x^2 - y^2$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ . Načrtněte dané těleso a jeho průmět  $D_{xy}$  do roviny  $z = 0$ .  $[V = 2\pi]$
42. a) Načrtněte těleso  $D$ :  $x^2 + y^2 \leq z \leq 9$  a jeho průmět  $D_{xy}$  do roviny  $z = 0$  (těleso ohraničené rotačním paraboloidem a rovinou).  
 b) Vypočítejte hmotnost tohoto tělesa, je-li hustota  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$ .  $[m = 243\pi/2]$   
 c) Vypočítejte objem tohoto tělesa.  $[V = 81\pi/2]$
43. a) Načrtněte těleso  $D$  a jeho průmět do roviny  $z = 0$ , je-li  $D$  ohraničeno plochami  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 3$ .  
 b) Vypočítejte hmotnost tohoto tělesa, je-li hustota  $\rho(x, y, z) = z$ .  $[m = 36\pi]$
44. Načrtněte těleso  $D$ :  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ ,  $x^2 + y^2 \leq 9$ . Vypočítejte jeho objem.  $[V = 4\pi(64 - 7\sqrt{7})/3]$
45. Je dáno těleso  $D$ . Zakreslete jeho průmět  $D_{xy}$  do roviny  $z = 0$ . Vypočítejte objem tohoto tělesa.  
 a)  $D$  je ohraničeno plochami  $3x + 2y = 12$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $z = x^2$ .  $[V = 32]$   
 b)  $D$  je ohraničeno plochami  $x = y^2$ ,  $x = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = x$ .  $[V = 4/5]$   
 c)  $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x \leq 2, y \leq 2, xy \geq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y\}$ .  $[V = 45/8]$
46. Načrtněte daný kužel  $D$  a jeho průmět  $D_{xy}$  do roviny  $z = 0$ . Určete hmotnost tohoto tělesa, jestliže  $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 4\}$ , hustota  $\rho(x, y, z) = z$ .  $[m = 64\pi]$
47. Načrtněte daný kužel  $D$  a jeho průmět  $D_{xy}$  do roviny  $z = 0$ . Určete hmotnost tohoto tělesa, jestliže  $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; 0 \leq z \leq 4 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ , hustota  $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .  $[m = 128\pi/3]$
48. Načrtněte těleso  $D$  a jeho průmět  $D_{xy}$  do roviny  $z = 0$ . Určete hmotnost tohoto tělesa, je-li  $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$ , hustota  $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .  $[m = 128\pi/15]$
49. Je dáno těleso  $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$ .  
 a) Vypočítejte jeho hmotnost, je-li hustota  $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .  $[m = 40\pi]$   
 b) Vypočítejte hmotnost tohoto tělesa, je-li hustota  $\rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ .  $[m = 8\pi]$
50. a) Načrtněte těleso  $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ ,  $R > 0$  je konstanta.  
 b) Vypočítejte hmotnost tohoto tělesa, je-li hustota  $\rho(x, y, z) = z$ .  $[m = \pi R^4/4]$
51. Je dáno homogenní těleso  $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; \sqrt{3x^2 + 3y^2} \leq z \leq 3\}$ , hustota  $\rho = konst$ .  
 Načrtněte těleso  $D$  a jeho průmět  $D_{xy}$  do roviny  $z = 0$ .  
 Pomocí trojného integrálu určete jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose  $z$ .  $[J_z = 27\pi\rho/10]$
52. a) Načrtněte těleso  $D$  a jeho průmět do roviny  $z = 0$ , je-li  $D$  ohraničeno plochami  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 18 - x^2 - y^2$ .  
 b) Vypočítejte objem tohoto tělesa.  $[V = 81\pi]$
53. Načrtněte těleso  $D$ :  $2z \geq x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$  a určete jeho objem.  $[V = 2\pi\sqrt{3} - 5\pi/3]$
54. Určete hmotnost koule o poloměru  $a$ , jestliže hustota je  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$ .  $[m = 8\pi a^5/15]$
55. Načrtněte těleso  $D$ :  $0 \leq z \leq 36 - 4x^2 - y^2$  a určete jeho objem.  $[V = 324\pi]$