Matematika II – přednáška 10

Co bude dneska?

Jak se počítá dvojný integrál - Fubiniho věta pro dvojný integrál.

Plošný obsah rovinného obrazce.

Výpočet mechanických charakteristik rovinné desky.

P.S.: Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
Slidy nenahrazují skripta ani zápisky ani účast na přednášce a jsou pouze pro osobní potřeby.

Shrnutí co bylo minule

Věta (Postačující podmínka pro existenci dvojného integrálu).
Nechť M je měřitelná množina v $\mathbb{E}_2$ a f je omezená a spojitá funkce na M. Pak dvojný integrál $\iint_M f \, dx \, dy$ existuje.

Věta (Nutná a postačující podmínka pro měřitelnost množiny v $\mathbb{E}_2$). *Množina $M \subset \mathbb{E}_2$ je měřitelná (v Jordanově smyslu) právě tehdy, je-li omezená a $\mu_2(\partial M) = 0$.*

Elementární obor integrace (připomenutí)

Definice (Elementární obor integrace). *Nechť $y = \phi_1(x)$ a $y = \phi_2(x)$ jsou spojité funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Pak množinu*

$$M = \big\{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\big\}$$

nazýváme elementárním oborem integrace vzhledem k ose x.

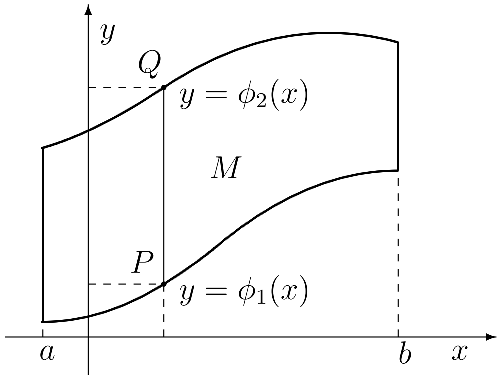
b) Nechť $x = \psi_1(y)$ a $x = \psi_2(y)$ jsou spojité funkce v intervalu $\langle c, d\rangle$ a nechť $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ pro všechna $y \in \langle c, d\rangle$. Pak množinu

$$M = \big\{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\big\}$$

nazýváme elementárním oborem integrace vzhledem k ose y.

Obrázky na tabuli.

Uvažujme elementární obor integrace vzhledem k ose x.



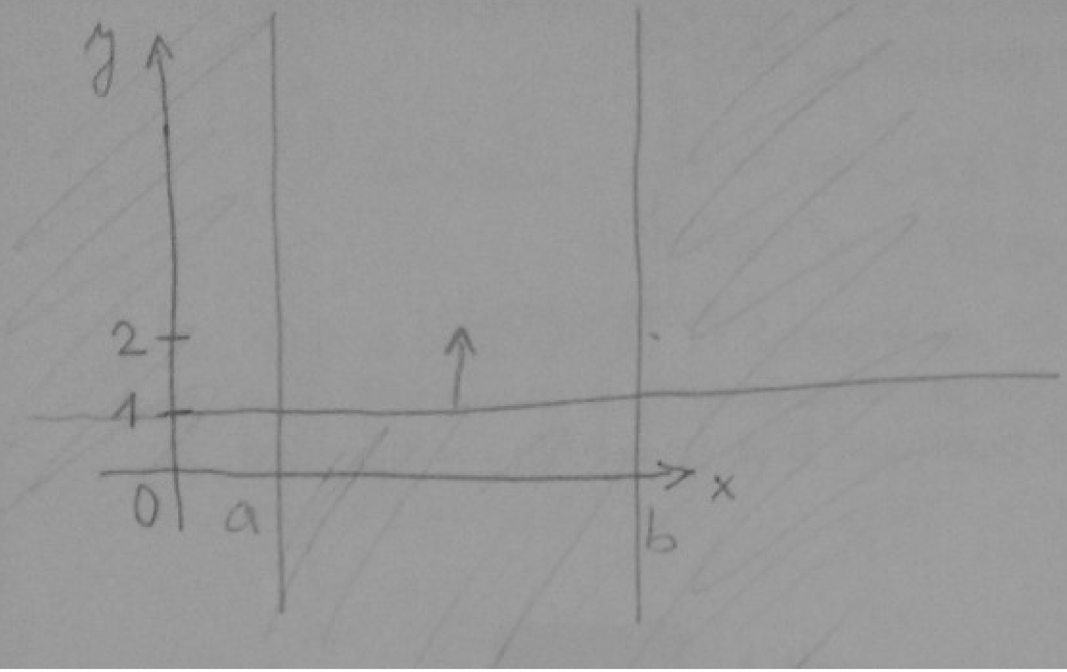
Obr. 10a

Příklady na EOI

funkce (mohou být i konstantní)

čísla

1) $M = \{ a \le x \le b \ ,\ \underbrace{1}_{=\,\phi_1(x)} \le y \le \phi_2(x) = 2 + x$

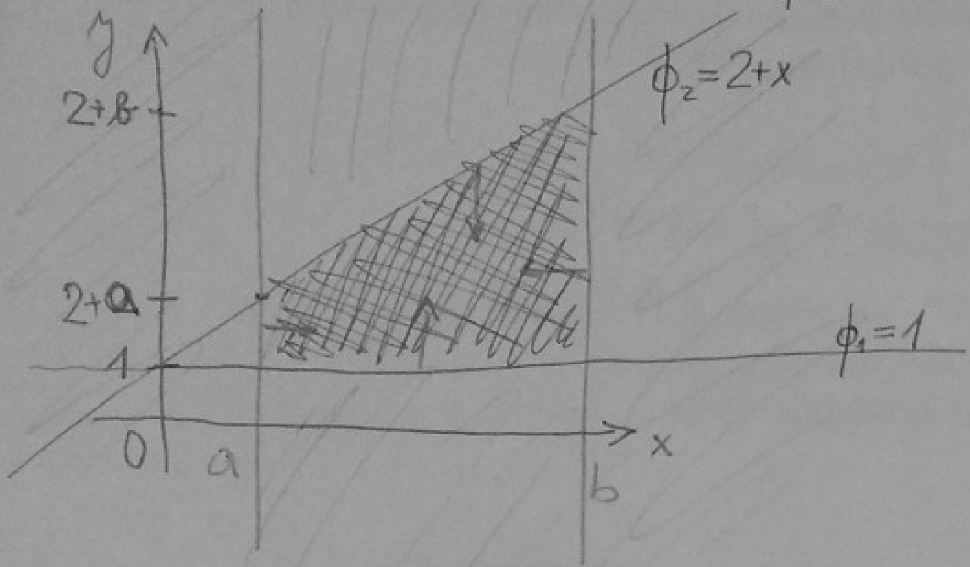


Příklady na EOI

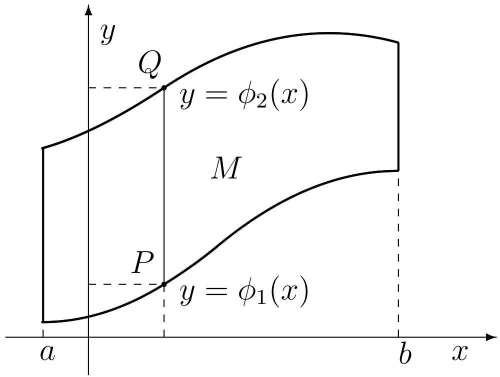
1) $M = \{ a \le x \le b \,,\; \underset{\overset{\shortparallel}{\phi_1(x)}}{1} \le y \le \underline{\phi_2(x) = 2 + x} \} \Rightarrow \boxed{EOI_x}$

čísla

funkce (mohou být i konstantní)



Uvažujme elementární obor integrace vzhledem k ose x.



Obr. 10a

Uvažujme rozdělení množiny M přes niž integrujeme na nekonečně tenké svislé pruhy (úsečky) např $\overline{PQ}$. Je jich nekonečně mnoho.

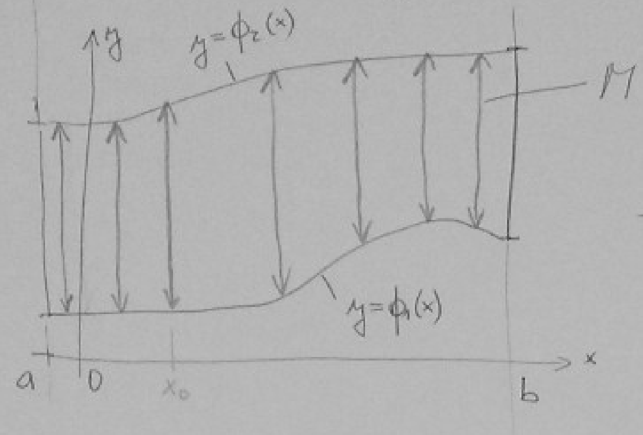
Uvažujme rozdělení množiny M přes niž integrujeme na nekonečně tenké svislé pruhy (úsečky) např $\overline{PQ}$. Je jich nekonečně mnoho.

Nyní integrujme funkci $f(x, y)$ na každé takové úsečce. Protože x je pevné, jedná se tedy o funkci proměnné y.

$$F(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy$$

Výsledek samozřejmě závisí na x (pro jaké x to byla úsečka).

Postup integrace při EOI$_x$ (vzhledem k ose x)



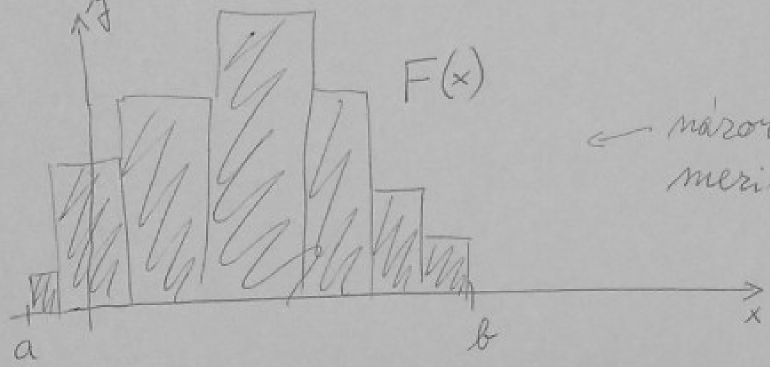
pro x_0 spočítám

$$F(x_0) = \int_{\phi_1(x_0)}^{\phi_2(x_0)} f(x_0,y)\,dy$$

Pro $x=x_0$ musím naintegrovat f-ci $f(x,y)$ přes y, protože je v x konstantní. Integruji mezi $\phi_1(x_0) \leq y \leq \phi_2(x_0)$.

Totéž zopakuji pro všechny řezy s konst. x.

Tak získám mezivýsledek pro každé x.
($a \leq x \leq b$).



← názorná ilustrace mezivýsledku (nepřesná a částečně zavádějící)

A ten pak už jen zintegruji podél x.

Uvažujme rozdělení množiny M přes niž integrujeme na nekonečně tenké svislé pruhy (úsečky) např $\overline{PQ}$. Je jich nekonečně mnoho.

Nyní integrujme funkci $f(x, y)$ na každé takové úsečce. Protože x je pevné, jedná se tedy o funkci proměnné y.

$$F(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy$$

Výsledek samozřejmě závisí na x (pro jaké x to byla úsečka).

Pak sečtu výsledky přes všech nekonečně úseček = integruju $F(x)$ jako funkci proměnné x od a do b.

Zformulujeme to jako větu:

Fubiniho věta

Věta (Fubiniho věta pro dvojný integrál). a) *Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k ose x. Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá v M. Pak*

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

b) *Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k ose y. Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá v M. Pak*

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Integrálům na pravé straně (jsou to dva jednoduché integrály) se říká *dvojnásobné*. Tj. Fubiniho věta převádí dvojný integrál na dvojnásobný.

Příklady na dvojný integrál

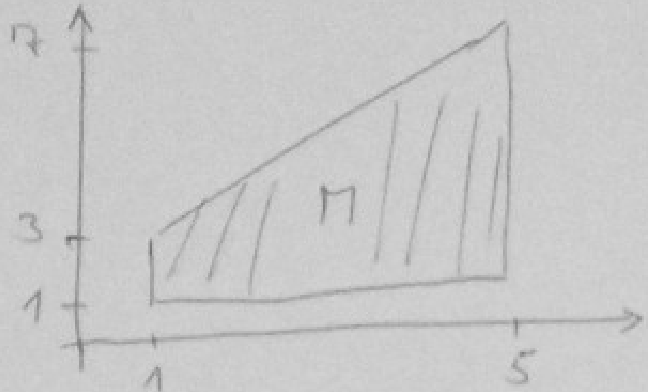
Na tabuli.

Plošný obsah rovinného obrazce

Na tabuli.

Př.:

$M = \{ 1 \leq x \leq 5,\ 1 \leq y \leq 2+x \} \to$ viz ①



$$I = \iint_M (x+y)\,dx\,dy = ?$$

M je $EDI_x \Rightarrow$ $$I = \int_1^5 \left(\int_1^{2+x} (x+y)\,dy \right) dx =$$

integruji přes y

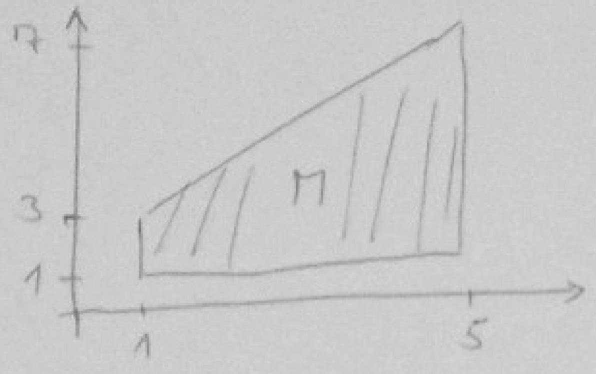
vztahuji se k y!

$$= \int_1^5 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^{2+x} dx = \int_1^5 \left(x\cdot(2+x) + \frac{(2+x)^2}{2} - x - \frac{1}{2} \right) dx =$$

5

Př.:

$M = \{1 \le x \le 5,\ 1 \le y \le 2+x\} \rightarrow$ viz 1



$$I = \iint_M (x+y)\,dx\,dy = ?$$

M je $EDI_x \Rightarrow$ $$I = \int_1^5 \left(\int_1^{2+x} (x+y)\,dy \right) dx =$$

integruji přes y
vztahuji se k y!

$$= \int_1^5 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^{2+x} dx = \int_1^5 \left(x\cdot(2+x) + \frac{(2+x)^2}{2} - x - \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \int_1^5 2x + x^2 + \frac{4+4x+x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\,dx = \int_1^5 \frac{3x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int_1^5 x^2 + 2x + 1\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_1^5 = \frac{3}{2} \cdot \frac{208}{3} = \underline{\underline{104}}$$