Matematika II – přednáška 12

Co bude dneska?

Dělení kvádru a jeho norma.

Riemanovy součty a jejich limita.

Trojný integrál na kvádru a na obecné množině v E_3.

Měřitelná množina a Jordanova míra.

Základní vlastnosti a Fubiniho věta.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
(pro osobní potřeby).

Dělení kvádru a jeho norma

Nechť $K = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle e, f\rangle$ je kvádr v $\mathbb{E}_3$ takový, jehož hrany jsou rovnoběžné se souřadnými osami x, y a z.

Definice (Dělení kvádru a jeho norma.). *Kvádr K lze rozdělit sítí rovin rovnoběžných s rovinami xy, xz nebo yz na n dílčích kvádrů $K_1, \dots, K_n$. Systém těchto kvádrů nazýváme dělení kvádru K. Pojmenujeme-li popsané dělení D, pak normou dělení D nazýváme délku nejdelší ze všech hran kvádrů $K_1, \dots, K_n$. Normu dělení D značíme $\|D\|$. Jsou-li délky hran dílčích kvádrů $K_1, \dots, K_n$ rovny Δx_1, Δy_1, Δz_1, $\dots$, Δx_n, Δy_n, Δz_n, můžeme normu $\|D\|$ vyjádřit:*

$$\|D\| = \max\{\Delta x_1; \Delta y_1; \Delta z_1; \dots ; \Delta x_n; \Delta y_n; \Delta z_n\}.$$

Motivace - na tabuli.

Riemanovy součty a jejich limita

Nechť je $f(x, y, z)$ omezená funkce na kvádru $K = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle e, f\rangle$. Nechť je D zmíněné dělení kvádru K. Označme Δx_1, Δy_1, Δz_1, $\dots$, Δx_n, Δy_n, Δz_n délky stran kvádrů $K_1, \dots, K_n$ dělení D. Nechť $\mathcal{V}$ je systém zvolených bodů $Z_i \in K_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Definice (Riemanovy součty a jejich limita.). *Riemannovým součtem funkce f na kvádru K, odpovídajícím dělení D a systému $\mathcal{V}$ vybraných bodů $Z_1, \dots, Z_n$, nazýváme součet*

$$s(f, D, \mathcal{V}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} f(Z_i) \cdot \Delta x_i \, \Delta y_i \, \Delta z_i.$$

Říkáme, že číslo S je limitou Riemannových součtů $s(f, D, \mathcal{V})$ pro $\|D\| \to 0+$, jestliže ke každému zvolenému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D kvádru K a pro každý zvolený systém $\mathcal{V}$ platí:

$$\|D\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |s(f, D, \mathcal{V}) - S| < \epsilon.$$

a píšeme:

$$\lim_{\|D\| \to 0+} s(f, D, \mathcal{V}) \;=\; S.$$

Trojný integrál na kvádru

Definice (trojný integrál na kvádru.). *Jestliže předchozí limita existuje, pak její hodnotu S nazýváme trojným integrálem funkce f na kvádru K. Tento integrál obvykle značíme*

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad \text{nebo} \qquad \iiint_K f\;dx\,dy\,dz.$$

Jestliže limita existuje, říkáme, že "trojný integrál $\iiint_K f\;dx\,dy\,dz$ existuje" nebo že "funkce f je integrovatelná na kvádru K".

Trojný integrál na množině M

na tabuli.

Měřitelná množina v $\mathbb{E}_3$ a její Jordanova míra

Definice (Měřitelná množina v $\mathbb{E}_3$.). *Předpokládejme, že M je omezená množina v $\mathbb{E}_3$. Říkáme, že množina M je měřitelná (v Jordanově smyslu), jestliže konstantní funkce $f(x,y,z) = 1$ je integrovatelná na M. V tomto případě nazýváme hodnotu*

$$\mu_3(M) \;=\; \iiint_M dx\,dy\,dz$$

třírozměrnou Jordanovou mírou množiny M.

$\mu_3(M)$ má názorný geometrický význam: Definuje a poskytuje návod jak vypočítat *objem* množiny M.

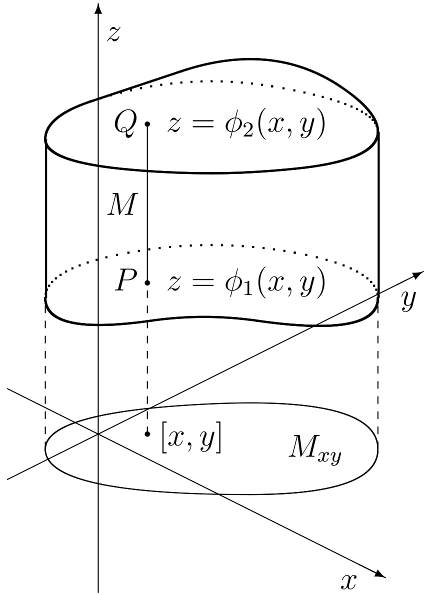
Množiny jejichž trojrozměrná míra je nula (”nemají”objem): Množiny konečného počtu bodů a křivek. Plochy (grafy funkcí) definované na uzavřených podmnožinách v $\mathbb{E}_3$. Jednoduché hladké plochy (bude později).

Věta. a) *Sjednocení konečně mnoha množin míry nula je množina míry nula.*
b) *Je-li N množina míry nula a $M \subset N$, pak M je také množina míry nula.*

Věta (Nutná a postačující podmínka pro to, aby množina v $\mathbb{E}_3$ byla měřitelná.). *Množina $M \subset \mathbb{E}_3$ je měřitelná (v Jordanově smyslu) právě tehdy, je-li omezená a* $\mu_3(\partial M) = 0$.

Věta (Postačující podmínka pro existenci trojného integrálu.). *Nechť* M *je měřitelná množina v* $\mathbb{E}_3$ *a* f *je omezená a spojitá funkce na* M. *Pak trojný integrál* $\iiint_M f\, dx\, dy\, dz$ *existuje.*

Elementární obor integrace



Obrázek ze skript M II

Definice (Elementární obor integrace v $\mathbb{E}_3$.). *Nechť* M_{xy} *je měřitelná uzavřená množina v* $\mathbb{E}_2$ *a* $z = \phi_1(x,y)$ *a* $z = \phi_2(x,y)$ *jsou spojité funkce na* M_{xy} *takové, že* $\phi_1(x,y) \le \phi_2(x,y)$ *pro všechna* $[x,y] \in M_{xy}$. *Pak množinu*

$$\begin{aligned} M \;&=\; \big\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ [x,y] \in M_{xy}, \\ &\qquad \phi_1(x,y) \le z \le \phi_2(x,y)\big\} \end{aligned}$$

Definice (Elementární obor integrace v $\mathbb{E}_3$.). *Nechť M_{xy} je měřitelná uzavřená množina v $\mathbb{E}_2$ a $z = \phi_1(x,y)$ a $z = \phi_2(x,y)$ jsou spojité funkce na M_{xy} takové, že $\phi_1(x,y) \leq \phi_2(x,y)$ pro všechna $[x,y] \in M_{xy}$. Pak množinu*

$$M = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ [x,y] \in M_{xy},\\ \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y)\big\}$$

Obdobně by se definovali elementární obory integrace vzhledem k rovinnám xz a yz.

Myšlenka věty: Obor integrace M rozdělíme na nekonečně mnoho svislých úseček. Jednou z nich je úsečka $\overline{PQ}$. Nejprve integrujeme funkci f na každé z těchto úseček jako funkci jedné proměnné z – dostáváme $F(x,y) = \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$. Výsledek závisí na x a na y, protože poloha úsečky $\overline{PQ}$ závisí na x a na y. Pak integrujeme $F(x,y)$ jakožto funkci dvou proměnných x a y na množině M_{xy}.

Fubiniho věta pro trojný integrál

Věta (Fubiniho věta pro trojný integrál.). *Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k rovině xy. Nechť $f(x,y,z)$ je spojitá funkce na M. Pak*

$$\iiint_M f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{M_{xy}} \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy.$$

Obdobně by se formulovala věta pro integraci na elementárním oboru integrace vzhledem k rovině xz či yz.

Příklady.

Fyzikální významy (použití) trojného integrálu

Objem

$$f \equiv 1 \longrightarrow V = \iiint\limits_M 1\,dx\,dy\,dz$$

Těžiště

$$T = [x_T, y_T, z_T] \qquad m = \iiint\limits_M \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \leftarrow \text{hmotnost}$$

$$x_T = \frac{m_{yz}}{m}$$

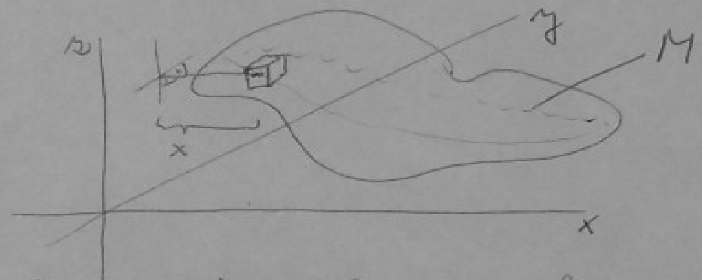
$$y_T = \frac{m_{xz}}{m}$$

$$z_T = \frac{m_{xy}}{m}$$

Statický moment vzhledem k rovině yz

$$\underbrace{m_{yz} = \iiint x \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

ρ = hustota [kg/m³]



Tj. součet všech příspěvků $\underbrace{\rho \cdot dx\,dy\,dz}_{\text{hmotnost } \square} \cdot \underbrace{x}_{\text{vzdálenost od } y\text{-}z}$

Atd m_{xz}, m_{xy}.

Moment setrvačnosti

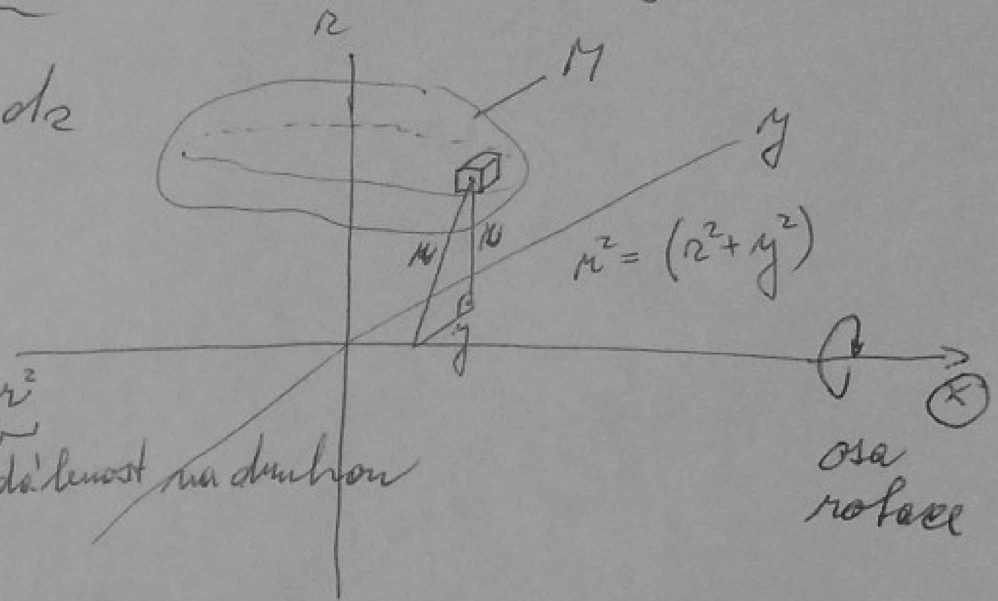
– velikost odporu, kterou klade těleso M při snaze ho roztočit kolem zvolené osy rotace

Moment setrvačnosti vzhledem k ose x

$$J_x = \iiint_M (y^2+z^2)\cdot\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$[kg\cdot m^2]$$

Je to součet příspěvků $\underbrace{\rho\cdot dx\,dy\,dz}_{dm}\cdot\underbrace{r^2}_{\text{vzdálenost na druhou}}$



Podobně J_y, J_z

Ale můžeme definovat i moment setrv. vzhledem k

rovině xy $\longrightarrow$ $J_{xy} = \iiint\limits_M z^2 \cdot \rho \, dx\,dy\,dz$

xz — " —

yz

nebo

počátku $\longrightarrow$ $J_0 = \iiint\limits_M (x^2+y^2+z^2)\rho \, dx\,dy\,dz$

Klasický úkol

- máme těleso a jeho hustotu

↳ chceme spočítat m, těžiště, momenty...

Úkol v Mat 2

- spočítáme integrál → co může mít výsledné číslo za význam?

tj. abych spočítal m, těžiště, momenty...

hledám f-ci $\rho(x,y,z)$ jako část integrandu

Př.: $\iiint_W xy\,dx\,dy\,dz,$

→ Hmotnost, pokud ρ = xy

→ Statický moment k rovině xz, pokud ρ = x

→ Statický moment k rovině yz, pokud ρ = y

→ (Statický moment k rovině xy, pokud ρ = xy/z)

→ (Moment setrvačnosti k ose x, pokud ρ = xy/(y^2 + z^2))

Atd.

Některé fyzikální a mechanické aplikace trojného integrálu

Mějme těleso ve tvaru měřitelné množiny M. Hustota tělesa budiž dána jako $\rho(x, y, z)$ a udávaná v $kg \cdot m^{-3}$. Pak

hmotnost tělesa .... $m = \iiint_M \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ [kg],

statický moment

vzhledem k rovině xy $m_{xy} = \iiint_M z \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ [kg · m],

vzhledem k rovině xz $m_{xz} = \iiint_M y \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ [kg · m],

vzhledem k rovině yz $m_{yz} = \iiint_M x \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ [kg · m],

souřadnice těžiště .. $x_T = \dfrac{m_{yz}}{m}, \quad y_T = \dfrac{m_{xz}}{m} \quad z_T = \dfrac{m_{xy}}{m},$

moment setrvačnosti

vzhledem k rovině xy $\quad J_{xy} = \iiint_M z^2 \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2]$,

vzhledem k rovině xz $\quad J_{xz} = \iiint_M y^2 \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2]$,

vzhledem k rovině yz $\quad J_{yz} = \iiint_M x^2 \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2]$,

vzhledem k ose x ... $\quad J_x = \iiint_M (y^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2]$,

vzhledem k ose y .... $\quad J_y = \iiint_M (x^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2]$,

vzhledem k ose z .... $\quad J_z = \iiint_M (x^2+y^2) \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2]$,

vzhledem k počátku . $\quad J_0 = \iiint_M (x^2+y^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2]$.