Matematika II – přednáška 13

Co bude dneska?

Některé vlastnosti trojného integrálu.

Transformace integrálu do cylindrických souřadnic.

Transformace integrálu do sférických souřadnic.

Nějaké příklady

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

Věta (Postačující podmínka pro existenci trojného integrálu.). *Nechť M je měřitelná množina v $\mathbb{E}_3$ a f je omezená a spojitá funkce na M. Pak trojný integrál $\iiint_M f\,dx\,dy\,dz$ existuje.*

Věta (Fubiniho věta pro trojný integrál.). *Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k rovině xy. Nechť $f(x,y,z)$ je spojitá funkce na M. Pak*

$$\iiint_M f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{M_{xy}} \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy.$$

Některé vlastnosti trojného integrálu

a) **Linearita trojného integrálu.** *Jsou-li funkce f a g integrovatelné na množině $M \subset \mathbb{E}_3$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak*

$$\iiint_M (f+g)\, dx\, dy\, dz = \iiint_M f\, dx\, dy\, dz + \iiint_M g\, dx\, dy\, dz,$$

$$\iiint_M \alpha \cdot f\, dx\, dy\, dz = \alpha \cdot \iiint_M f\, dx\, dy\, dz.$$

Některé vlastnosti trojného integrálu

a) **Linearita trojného integrálu.** *Jsou-li funkce f a g integrovatelné na množině $M \subset \mathbb{E}_3$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak*

$$\iiint_M (f+g)\,dx\,dy\,dz = \iiint_M f\,dx\,dy\,dz + \iiint_M g\,dx\,dy\,dz,$$

$$\iiint_M \alpha \cdot f\,dx\,dy\,dz = \alpha \cdot \iiint_M f\,dx\,dy\,dz.$$

b) **Aditivita trojného integrálu vzhledem k oboru integrace.** *Nechť jsou M_1 a M_2 měřitelné množiny v $\mathbb{E}_3$, takové, že $\mu_3(M_1 \cap M_2) = 0$, a f je integrovatelnou funkcí na M_1 i na M_2, pak*

$$\iiint_{M_1} f\,dx\,dy\,dz + \iiint_{M_2} f\,dx\,dy\,dz = \iiint_{M_1 \cup M_2} f\,dx\,dy\,dz.$$

Některé vlastnosti trojného integrálu

c) Nechť f je integrovatelná funkce na množině $M \in \mathbb{E}_3$ a omezená funkce g se liší od f nejvýše na množině míry nula v M, pak g je také integrovatelná funkce v M a

$$\iiint_M g \; dx \, dy \, dz \; = \; \iiint_M f \; dx \, dy \, dz.$$

Některé vlastnosti trojného integrálu

c) Nechť f je integrovatelná funkce na množině $M \in \mathbb{E}_3$ a omezená funkce g se liší od f nejvýše na množině míry nula v M, pak g je také integrovatelná funkce v M a

$$\iiint_M g \, dx \, dy \, dz = \iiint_M f \, dx \, dy \, dz.$$

d) Je-li f omezená funkce na množině $M \in \mathbb{E}_3$ míry nula, pak f je integrovatelná na M a

$$\iiint_M f \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Některé vlastnosti trojného integrálu

e) Jsou-li f a g integrovatelné funkce na množině $M \subset \mathbb{E}_3$ takové, že $f(x,y,z) \geq g(x,y,z) \;\; \forall \, [x,y,z] \in M$, pak

$$\iiint_M f \; dx \, dy \, dz \; \geq \; \iiint_M g \; dx \, dy \, dz.$$

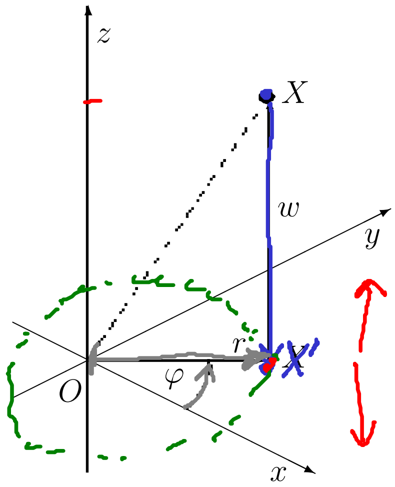
Speciálně, je-li $f(x,y,z) \geq 0 \;\; \forall \, [x,y,z] \in M$, pak

$$\iiint_M f \; dx \, dy \, dz \; \geq \; 0.$$

Cylindrické souř. (Válcové)

$X = [x, y, z]$

$[r, \varphi, w]$



Obr.ze skript

$r \geq 0$

$\varphi \in J$, který má max. velikost 2π

$w \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = w \end{cases}$$

$J = r$

Cylindrické souřadnice bodu $X = [x, y, z] \in \mathbb{E}_3$ jsou r, φ, w.

Geometrický význam: r, φ jsou polárními souřadnicemi bodu $[x, y]$ v rovině xy a $w = z$. (obrázek na dalším slidu).

Mezi kartézskými souřadnicemi a cylindrickými souřadnicemi bodu X platí relace:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = w.$$

Jaký je Jakobián? (na tabuli).

Cylindrické souřadnice

Motivační příklad na tabuli

Př.: $D: x^2+y^2 < 4$ $\quad V = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz = ?$

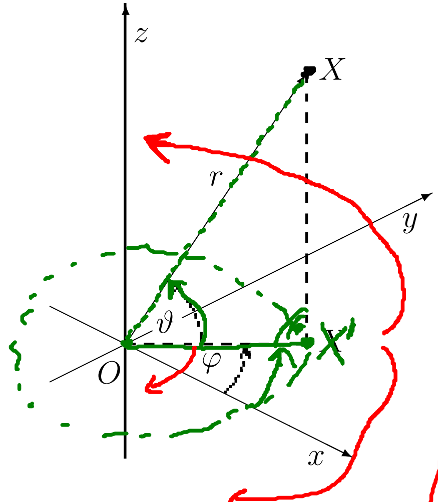
$0 \le z - 4 \times$

Sférické souřadnice

"Kulové" $[r, \varphi, \vartheta]$

II.7.8. Sférické souřadnice v $\mathbb{E}_3$. Sférické souřadnice bodu $X = [x, y, z]$ v $\mathbb{E}_3$ jsou r, φ a ϑ. Geometrický význam - viz. obrázek. Toto vede k následujícím rovnicím:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cos\vartheta \cos\varphi, \\ y &= r \cos\vartheta \sin\varphi, \\ z &= r \sin\vartheta. \end{aligned}}$$

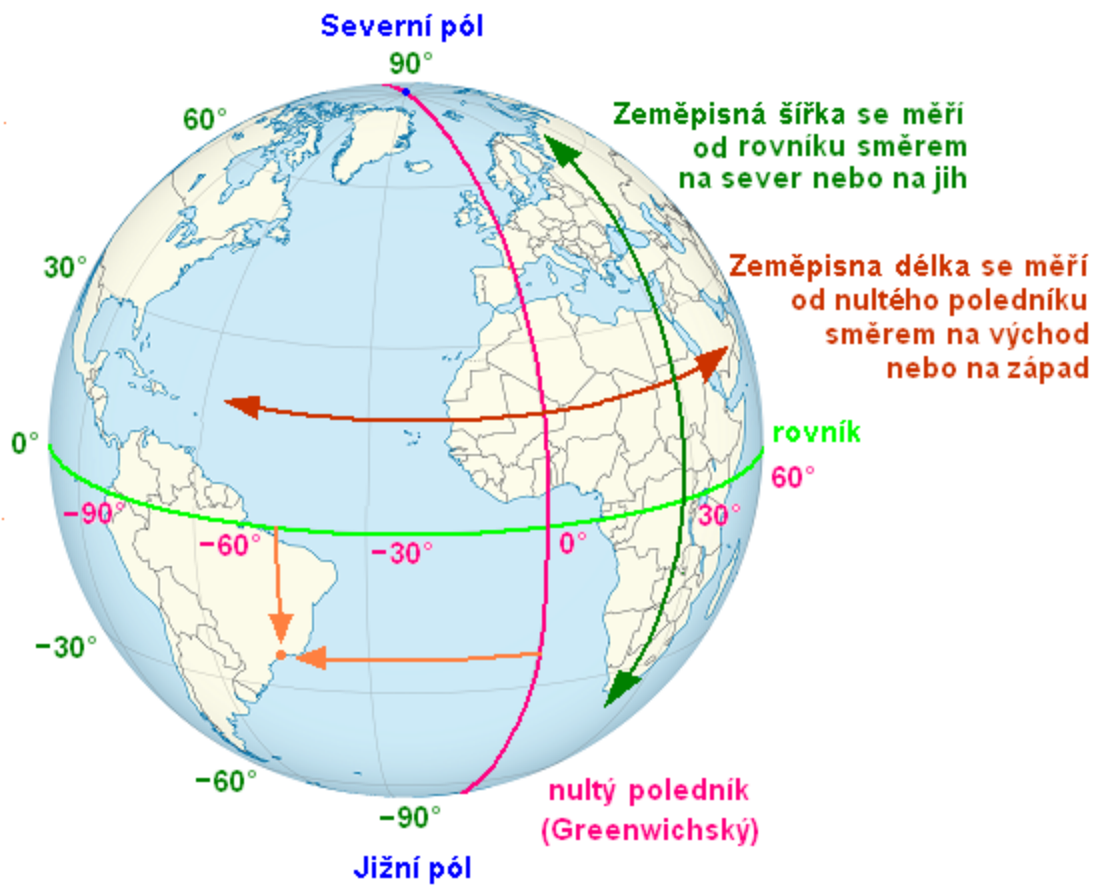


Obr. ze skript

$r \geq 0$

φ má int. s max délkou 2π

$\vartheta \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$

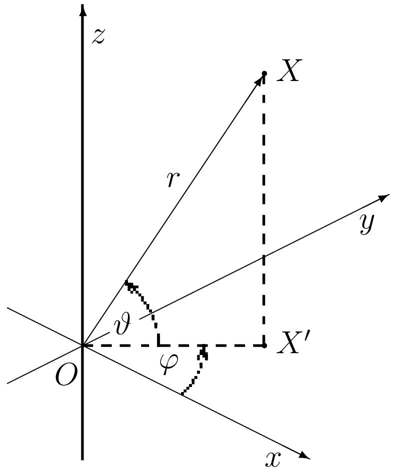

Severní pól
90°
60°
Zeměpisná šířka se měří
od rovníku směrem
na sever nebo na jih
30°
Zeměpisna délka se měří
od nultého poledníku
směrem na východ
nebo na západ
0°
rovník
60°
−90°
30°
−60°
−30°
0°
−30°
−60°
−90°
nultý poledník
(Greenwichský)
Jižní pól

Sférické souřadnice

II.7.8. Sférické souřadnice v $\mathbb{E}_3$. Sférické souřadnice bodu $X = [x, y, z]$ v $\mathbb{E}_3$ jsou r, φ a ϑ. Geometrický význam - viz. obrázek. Toto vede k následujícím rovnicím:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \cos \varphi, \\ y &= r \cos \vartheta \sin \varphi, \\ z &= r \sin \vartheta. \end{aligned}$$

$J = r^2 \cos \vartheta$



Obr. ze skript

Platí (dk. na tabuli) $dx\,dy\,dz = r^2 \cos \vartheta \, dr\, d\varphi\, d\vartheta.$

Příklady na tabuli.

Př.: $D := x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, R konst.

$z \ge 0$

b) $m = ?$ $\rho(x,y,z) = z$