Matematika II – přednáška 14

Co bude dneska?

Výpočet mechanických charakteristik těles. Objem tělesa.

Transformace integrálu do zobecněných cylindrických souřadnic a zobecněných sférických souřadnic. Shrnutí 2D a 3D int.

Diferenciání operátory. Divergence vektorového pole. Rotace vektorového pole.

Nějaké příklady

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
(pro osobní potřeby).

Cylindrické souřadnice

Cylindrické souřadnice bodu $X = [x, y, z] \in \mathbb{E}_3$ jsou r, φ, w.

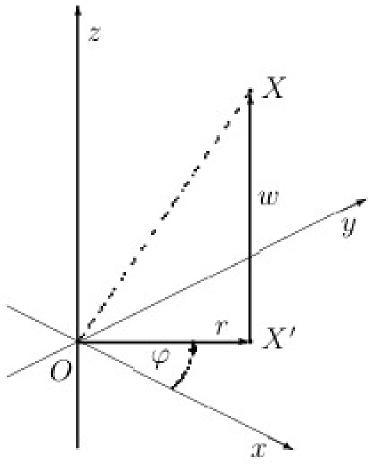
Geometrický význam: r, φ jsou polárními souřadnicemi bodu $[x, y]$ v rovině xy a $w = z$. (obrázek na dalším slidu).

Mezi kartézskými souřadnicemi a cylindrickými souřadnicemi bodu X platí relace:

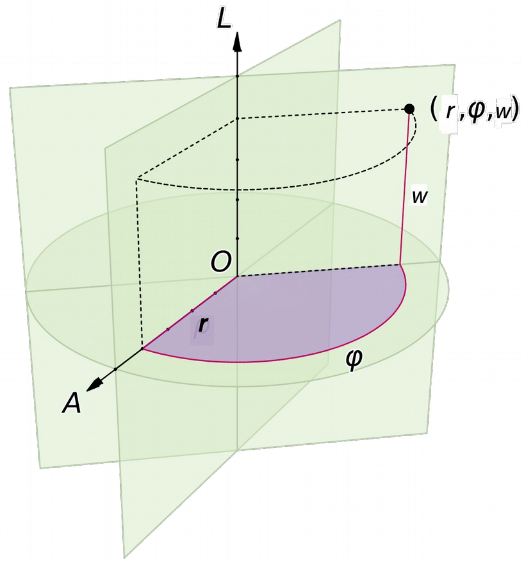
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = w.$$

$$dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\varphi\,dw.$$

Tedy $J = r$.



Obr.ze skript



Zobecněné cylindrické souřadnice

$$x = x_0 + ar\ \cos\,\varphi, \quad y = y_0 + br\ \sin\,\varphi, \quad z = z_0 + cw,$$

$[x_0, y_0, z_0]$ je vybraný bod v $\mathbb{E}_3$ (počátek zobecněného cylindrického souřadného systému), a, b, c jsou kladné parametry.

$$dx\,dy\,dz \;=\; abc\,r\;dr\,d\varphi\,dw.$$

Příklad na tabuli.

Další možnosti zobecnění - úvaha na tabuli.

Jak spočítat Jakobián?

- obecně je:

$$x = \Phi_1(r, \varphi, w)$$
$$y = \Phi_2(r, \varphi, w)$$
$$z = \Phi_3(r, \varphi, w)$$

$$\Downarrow$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} & \cdots & \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Pro zobec. cylindr. souřadn.

$$\left\{\begin{aligned} a&=1 \\ b&=1 \\ c&=1 \end{aligned}\right.$$

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = w$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{J = r}$$

$$x = \Phi_1(\ ) = x_0 + a r \cos\varphi$$
$$y = \Phi_2(\ ) = y_0 + b r \sin\varphi$$
$$z = \Phi_3(\ ) = z_0 + c \cdot w$$

$$J = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a r \sin\varphi & 0 \\ b\sin\varphi & b r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} =$$

$$= c \cdot (a\cos^2\varphi \cdot b \cdot r + a r \sin^2\varphi \cdot b)$$

$$= \boxed{c\, a\, b\, r} \quad (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 1$$

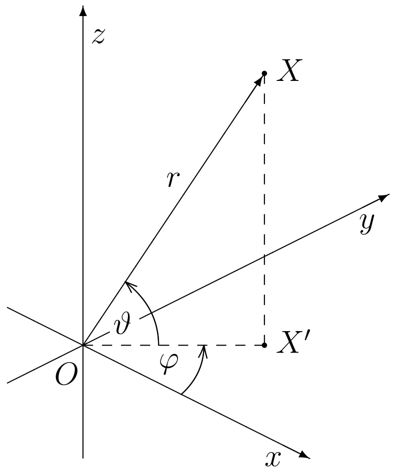
Zobecněné cylindrické souřadnice

Příklad na tabuli.

Sférické souřadnice

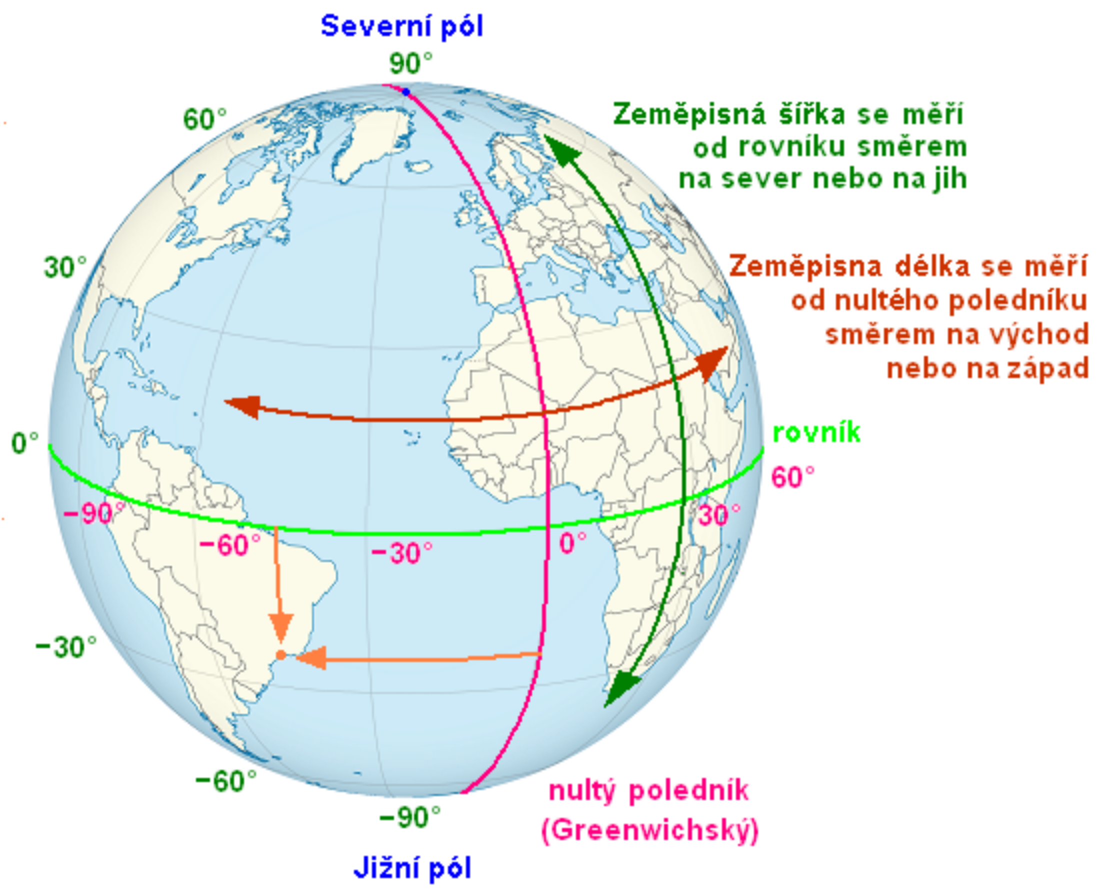
II.7.8. Sférické souřadnice v $\mathbb{E}_3$. Sférické souřadnice bodu $X = [x, y, z]$ v $\mathbb{E}_3$ jsou r, φ a ϑ. Geometrický význam - viz. obrázek. Toto vede k následujícím rovnicím:

$$\begin{aligned} x &= r \cos\vartheta \cos\varphi, \\ y &= r \cos\vartheta \sin\varphi, \\ z &= r \sin\vartheta. \end{aligned}$$



Obr. ze skript

Platí $\quad dx\,dy\,dz = r^2 \cos\vartheta \, dr\, d\varphi\, d\vartheta.$


Severní pól
90°
60°
30°
0°
−30°
−60°
−90°
Jižní pól
Zeměpisná šířka se měří
od rovníku směrem
na sever nebo na jih
Zeměpisna délka se měří
od nultého poledníku
směrem na východ
nebo na západ
rovník
60°
30°
0°
−30°
−60°
−90°
nultý poledník
(Greenwichský)

Zobecněné sférické souřadnice

$$x = x_0 + ar\ \cos\,\vartheta\ \cos\,\varphi, \quad y = y_0 + br\ \cos\,\vartheta\ \sin\,\varphi, \quad z = z_0 + cr\ \sin\,\vartheta,$$

$[x_0, y_0, z_0]$ je vybraný bod v $\mathbb{E}_3$ (počátek zobecněného sférického souřadného systému), a, b, c jsou kladné parametry.

$$dx\,dy\,dz \ = \ abc\,r^2\ \cos\,\vartheta\ dr\,d\varphi\,d\vartheta.$$

Příklad na tabuli.

Některé fyzikální a mechanické aplikace trojného integrálu

Mějme těleso ve tvaru měřitelné množiny M. Hustota tělesa budiž dána jako $\rho(x, y, z)$ a udávaná v $kg \cdot m^{-3}$. Pak

hmotnost tělesa . . . . $m = \iiint_M \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ [kg],

statický moment

vzhledem k rovině xy $m_{xy} = \iiint_M z \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ [kg · m],

vzhledem k rovině xz $m_{xz} = \iiint_M y \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ [kg · m],

vzhledem k rovině yz $m_{yz} = \iiint_M x \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ [kg · m],

souřadnice těžiště . . $x_T = \dfrac{m_{yz}}{m}$, $y_T = \dfrac{m_{xz}}{m}$ $z_T = \dfrac{m_{xy}}{m}$,

moment setrvačnosti

vzhledem k rovině xy $\quad J_{xy} = \iiint_M z^2 \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2]$,

vzhledem k rovině xz $\quad J_{xz} = \iiint_M y^2 \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2]$,

vzhledem k rovině yz $\quad J_{yz} = \iiint_M x^2 \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2]$,

vzhledem k ose x … $\quad J_x = \iiint_M (y^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2]$,

vzhledem k ose y …. $\quad J_y = \iiint_M (x^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2]$,

vzhledem k ose z …. $\quad J_z = \iiint_M (x^2+y^2) \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2]$,

vzhledem k počátku . $\quad J_0 = \iiint_M (x^2+y^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2]$.

Shrnutí dvojného a trojného integrálu

Dvojný/Trojný integrál $\longrightarrow$ Elementární obor integrace, Fubiniho věta $\longrightarrow$
$\longrightarrow$ Dvojnásobný/Trojnásobný integrál.

Případně (podle příkladu) použití transformace souřadnic (2D Polární, 3D Cylindrické, Sférické).

Fyzikální charakteristiky.

<u>Covid vtipy</u>

Operátor nabla

Definice (operátor nabla). *Symbolem* ∇ *označujeme vektorový operátor, nazývaný operátor nabla, jehož souřadnicemi jsou postupně parciální derivace podle* x, y *a* z:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Operátor nabla se používá k označení různých vektorových i skalárních polí. Například gradient skalárního pole φ v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$ je vektorové pole:

$$(\partial_x, \partial_y, \partial_z)\varphi$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

gradient: skalár $\longrightarrow$ vektor

vstup výsledek

Divergence vektorového pole

$\vec{f}$

Definice (divergence vektorového pole). *Nechť* $\mathbf{f} = (U, V, W)$ *je vektorové pole v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$. *Divergencí* $\mathbf{f}$ *nazýváme skalární pole, které označujeme* $\operatorname{div} \mathbf{f}$ *a které definujeme rovnicí*

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$$

(ve všech bodech $[x, y, z] \in D$, *ve kterých má pravá strana smysl).*

Pomocí operátoru nabla můžeme divergenci zapsat: $\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f}$.

Příklady na tabuli.

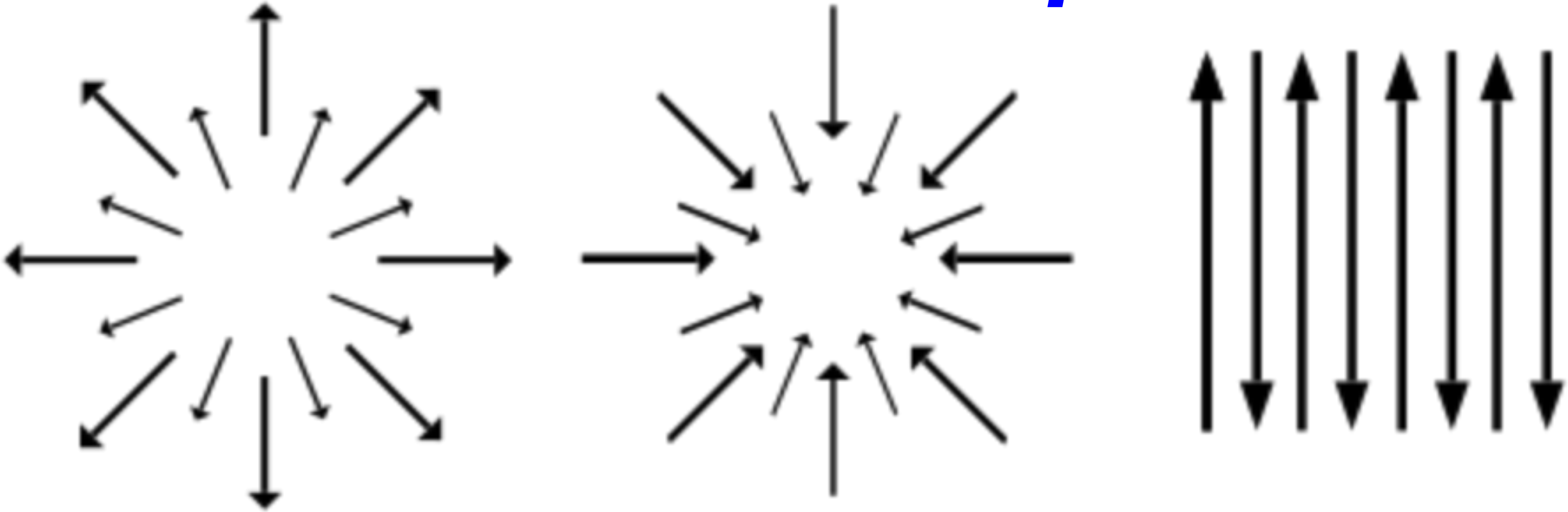
divergence: vektor → skalár

tj. číslo !

- fyzikální představa: zdroj/propad vektorového pole (je hadice s vytékající vodou nebo trubka odčerpává vodu?)

jak moc?

2D vektorové pole



$\partial/\partial x(U) > 0$

$\partial/\partial y(V) > 0$

$\nabla \cdot (\vec{f}) > 0$

s kladnou divergencí

$\partial/\partial x(U) < 0$

$\partial/\partial y(V) < 0$

$\nabla \cdot (\vec{f}) < 0$

se zápornou div

$\partial/\partial x(U) = 0$

$\partial/\partial y(V) = 0$

$\nabla \cdot (\vec{f}) = 0$

má div = 0

$\vec{f} = (u, v, w)$

$= (x, y, z)$

<u>Pr.:</u> $\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = ?$

<u>Pr. 2:</u>

$\vec{f} = \begin{pmatrix} z \\ y^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{div} \vec{f} = ?$

Rotace vektorového pole

rotace : vektor → vektor

vstup výsledek

Definice (rotace vektorového pole). *Nechť* $\mathbf{f} = (U, V, W)$ *je vektorové pole v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$. *Rotací* $\mathbf{f}$ *nazýváme vektorové pole, které označujeme* $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ *a které definujeme rovnicí*

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \ \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

(ve všech bodech $[x, y, z] \in D$, *ve kterých má pravá strana smysl).*

Pomocí operátoru nabla lze rotaci vyjádřit:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}}, & \vec{\mathbf{j}}, & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}, & \dfrac{\partial}{\partial y}, & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ U, & V, & W \end{vmatrix}.$$

-představa:
osa rotace daného
vekt. pole v daném bodě
osa je orientována
(pravidlo P ruky)
a (vektor) má velikost
= jak hodně rotuje

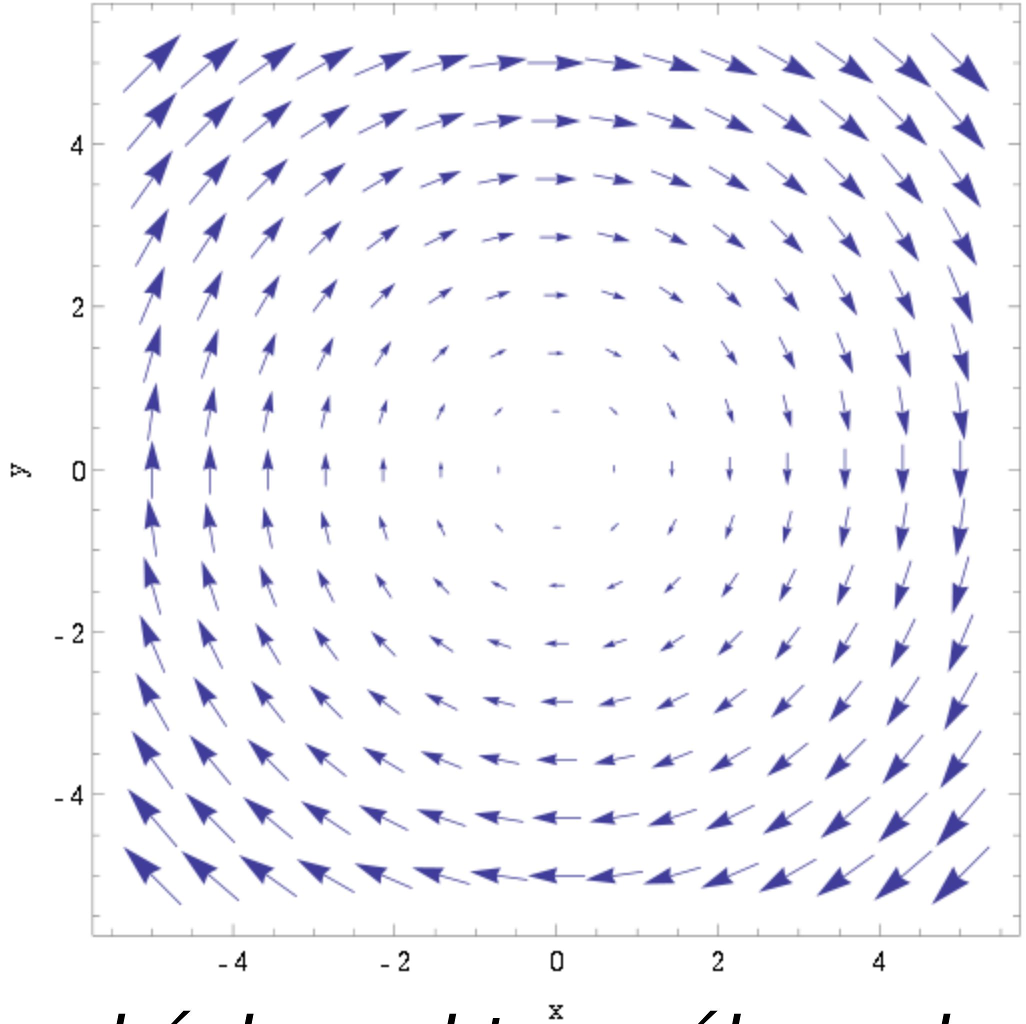
"Determinant" na pravé není determinantem přesně v tom smyslu, v jakém jej známe. Je to však užitečné schéma, pro výpočet rotace. Příklady na tabuli.

Pr.:

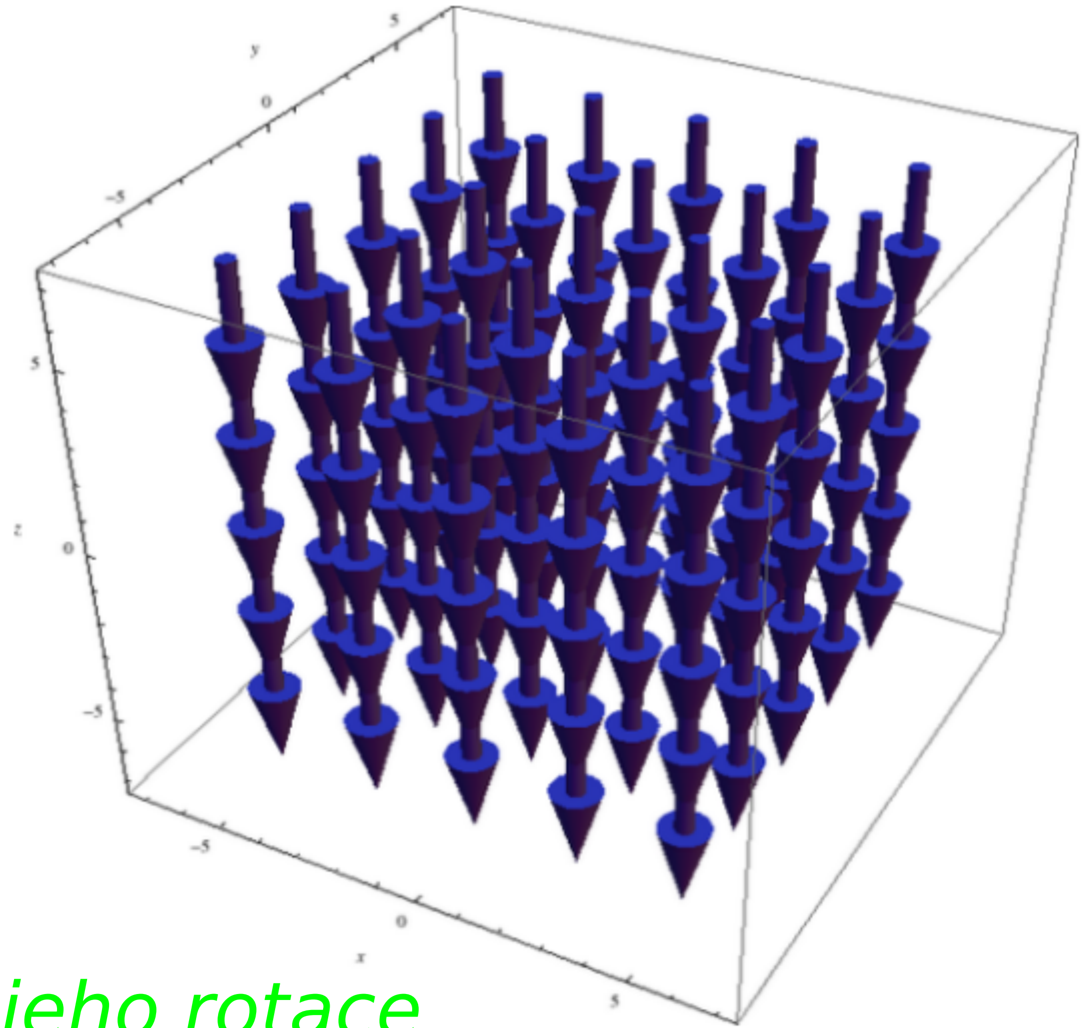
$$\vec{f} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} = u \\ = v \\ = w \end{matrix} \qquad \operatorname{rot} \vec{f} = ? = \nabla \times \vec{f}$$

Pr. 2:

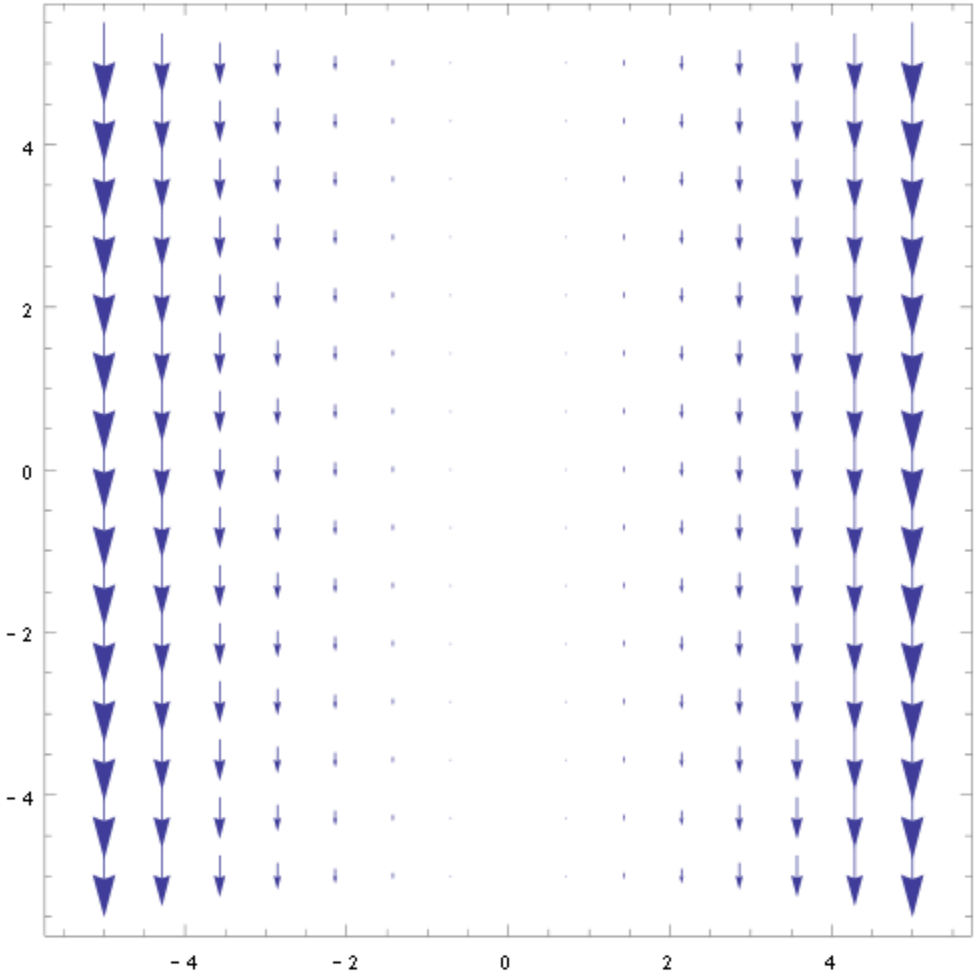
$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rot} \vec{f} = ?$$



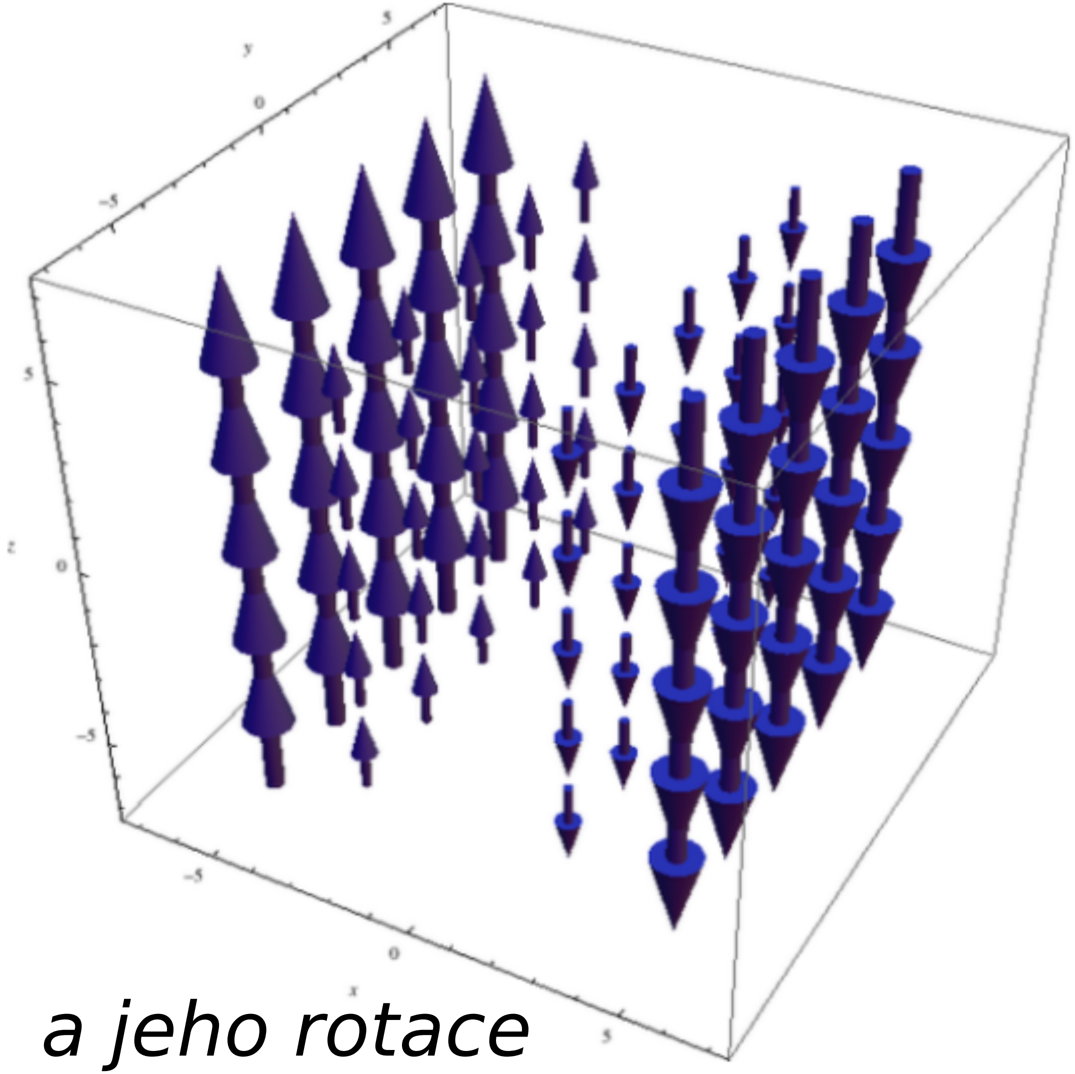
ukázka vektorového pole v rovině xy



a jeho rotace
= výsledkem je konst. pole (0,0,-2)



Ukázka vektorového pole
v rovině yz



a jeho rotace
= výsledkem je opět vekt. pole

Je-li φ skalární pole a $\mathbf{f}$ vektorové pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$ a mají-li obě pole v D druhé parciální derivace, pak

$$\begin{aligned} 1) \quad \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi &= \mathbf{0}, \\ 2) \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{f} &= 0. \end{aligned}$$

- interpretaci si vysvětlíme později, zatím stačí, že z definice to tak vyjde

1) rotace potenciálního pole je nulová, vysvětlení viz Stokesova věta
(nevířivé pole má rotaci nulovou)

v konzervativním poli nelze vykonat práci pohybem po uzavřené křivce,
tj. vyjitím ze startu a návratem opět na start

2) divergence solenoidálního pole je nulová, viz Gaussova-Ostrogradského věta
(nezřídlové pole nemá zdroj)

tj. magnet nemá zdroj, ale dá se představit jako složený ze dvou částí: + a -