Matematika II – přednáška 15

Co bude dneska?

Budeme směřovat ke křivkovému integrálu, tedy:

Jednoduchá hladká křivka v E_2 a E_3. Parametrizace křivky.

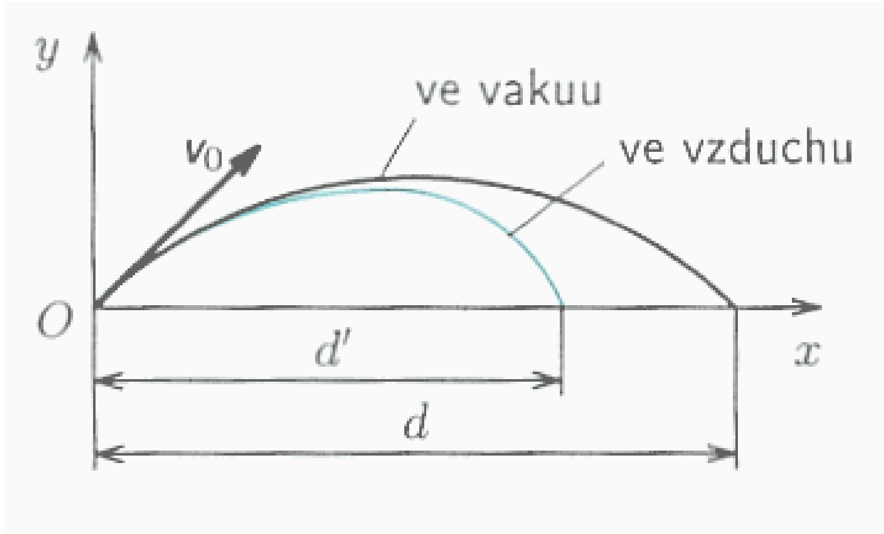
Orientovaná křivka. Jednoduchá po částech hladká křivka.

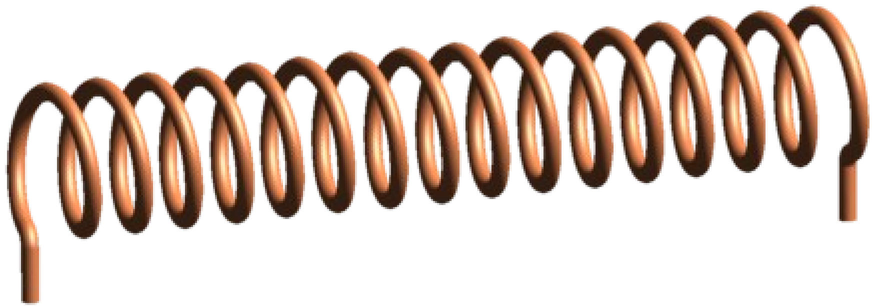
Křivka zadaná paramtrizací. křivka zadaná průnikem dvou ploch.

Nějaké příklady

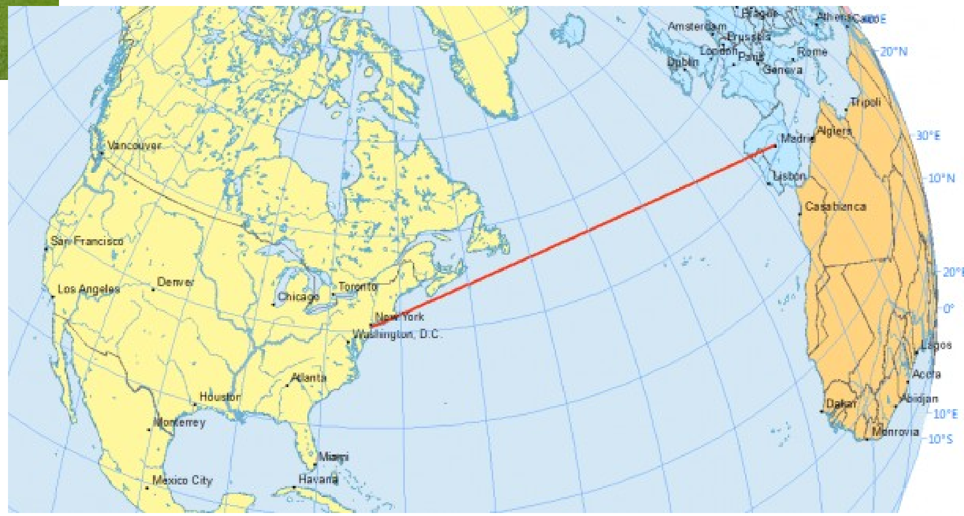
Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
(pro osobní potřeby).

Křivkový integrál – motivace





Křivkový integrál – motivace



Jednoduchá hladká křivka v $\mathbb{E}_2$ a $\mathbb{E}_3$

Motivace:

Bod A se pohybuje v $\mathbb{E}_2$ nebo v $\mathbb{E}_3$ v časovém intervalu $\langle a, b\rangle$ a jeho poloha v okamžiku t je $P(t)$.

Jednoduchá hladká křivka v $\mathbb{E}_2$ a $\mathbb{E}_3$

Motivace:

Bod A se pohybuje v $\mathbb{E}_2$ nebo v $\mathbb{E}_3$ v časovém intervalu $\langle a, b\rangle$ a jeho poloha v okamžiku t je $P(t)$.

Nechť

a) bod A se v žádných dvou různých okamžicích t_1, $t_2 \in \langle a, b\rangle$, $t_1 < t_2$ (s možnou výjimkou případu, kdy $t_1 = a$ a $t_2 = b$) nenachází na stejném místě a

b) rychlost $\dot{P}(t)$ pohybu je omezená, mění se spojitě a je různá od nuly s možnou výjimkou případů, kdy $t = a$ nebo $t = b$.

Dráhu (trajektorii) kterou bod kterou bod proběhne budeme nazývat jednoduchou hladkou křivkou a funkci $P(t)$ parametrizací křivky.

Jednoduchá hladká křivka - definice

Budeme uvažovat, že P je zobrazení intervalu $\langle a, b\rangle$ do $\mathbb{E}_2$ nebo do $\mathbb{E}_3$. Potom jednoduchá hladká křivka je obor hodnot tohoto zobrazení.

Pro pevné t z $\langle a, b\rangle$ je $P(t)$ bod na ploše či v prostoru ($\mathbb{E}_k$). Tj. $P(t)$ má dvě či tři souřadnice.

Tj., je-li $\phi(t)$, $\psi(t)$ ($k = 2$) nebo $\phi(t)$, $\psi(t)$, $\vartheta(t)$ ($k = 3$), můžeme psát:

$$\begin{aligned} P(t) &= \big[\phi(t), \psi(t)\big] && \text{je-li } k = 2, \\ P(t) &= \big[\phi(t), \psi(t), \vartheta(t)\big] && \text{je-li } k = 3. \end{aligned}$$

Jednoduchá hladká křivka - definice

$$P(t) = \big[\phi(t), \psi(t)\big] \qquad \text{je-li } k = 2,$$
$$P(t) = \big[\phi(t), \psi(t), \vartheta(t)\big] \qquad \text{je-li } k = 3.$$

ϕ a ψ (respektive ϕ, ψ a ϑ) jsou funkcemi jedné proměnné t, definovanými v intervalu $\langle a, b\rangle$. Nazýváme je *souřadnicové funkce* zobrazení P. Proměnnou t nazýváme *parametr*.

Jednoduchá hladká křivka - definice

$$\begin{aligned} P(t) &= \big[\phi(t), \psi(t)\big] \qquad && \text{je-li } k = 2, \\ P(t) &= \big[\phi(t), \psi(t), \vartheta(t)\big] \qquad && \text{je-li } k = 3. \end{aligned}$$

ϕ a ψ (respektive ϕ, ψ a ϑ) jsou funkcemi jedné proměnné t, definovanými v intervalu $\langle a, b\rangle$. Nazýváme je *souřadnicové funkce* zobrazení P. Proměnnou t nazýváme *parametr*.

Derivaci funkce P podle t značíme tečkou a považujeme ji za vektorovou funkci. (Např. ve fyzice je derivací polohy podle času rychlost a rychlost je vektor.)

Souřadnice $\dot{P}(t)$ zapisujeme v kulatých závorkách. Rovněž můžeme použít vektory **i**, **j** a **k** (jednotkové vektory, orientované souhlasně s osami x, y a z a psát:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \big(\dot\phi(t), \dot\psi(t)\big) = \dot\phi(t)\,\mathbf{i} + \dot\psi(t)\,\mathbf{j} \qquad && \text{je-li } k = 2, \\ \dot{P}(t) &= \big(\dot\phi(t), \dot\psi(t), \dot\vartheta(t)\big) = \dot\phi(t)\,\mathbf{i} + \dot\psi(t)\,\mathbf{j} + \dot\vartheta(t)\,\mathbf{k} \qquad && \text{je-li } k = 3. \end{aligned}$$

Jednoduchá hladká křivka - definice

$$P(t) = \big[\phi(t), \psi(t)\big] \qquad \text{je-li } k = 2,$$
$$P(t) = \big[\phi(t), \psi(t), \vartheta(t)\big] \qquad \text{je-li } k = 3.$$

Zobrazení P považujeme za spojité, jestliže všechny jeho souřadnicové funkce jsou spojité.

Podobně, o zobrazení P říkáme, že má spojitou derivaci, mají-li všechny souřadnicové funkce spojitou derivaci.

Poznámka: Nehrozí-li nedorozumění a záměna se značením souřadných os, můžeme místo $\phi(t)$, $\psi(t)$, $\vartheta(t)$ souřadnicové funkce zobrazení P značit i $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Jednoduchá hladká křivka - definice

Definice (jednoduchá hladká křivka). Nechť P je spojité zobrazení intervalu $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{E}_k$ (kde $k = 2$ nebo $k = 3$). Předpokládejme, že

a) zobrazení P je v intervalu $\langle a, b\rangle$ prosté, s možnou výjimkou případu, kdy $P(a) = P(b)$ a

b) P má omezenou, spojitou a nenulovou derivaci $\dot{P}$ v otevřeném intervalu (a, b).

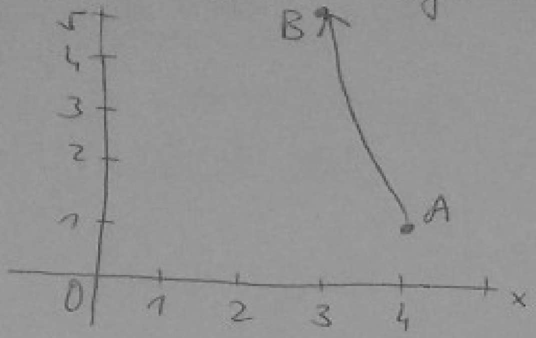
Množinu všech bodů $P(t)$ pro $t \in \langle a, b\rangle$ (tj. obor hodnot zobrazení P) pak nazýváme *jednoduchá hladká křivka* v $\mathbb{E}_k$. Zobrazení P nazýváme *parametrizace*.

Je-li $P(a) = P(b)$ pak nazýváme JHK uzavřenou.

JHK většinou označujeme velkými písmeny, například C, K, C_1. Obrázky na tabuli.

Př.:

Parametrizujte úsečku AB, kde poč. bod $A=[4,1]$ a konc. bod $B=[3,5]$.



Směrový vektor přímky AB je:

$$\vec{s} = \overline{B-A} = (-1,4)$$

Rovnice přímky:

$$X = A + t\cdot\vec{s} \iff \boxed{\begin{aligned} x(t) &= 4+(-1)t \\ y(t) &= 1+4\cdot t \end{aligned}}$$

Jak je to s parametrizací? Je jednoznačná?

Jak najít tečný vektor k JHK? Na tabuli.

Příklady parametrizace na tabuli.

Základní křivky (ke zkoušce):

- úsečky
- kružnice, elipsy
- část grafu f-ce 1 proměnné
- průniky ploch
- speciální křivky (např. šroubovice, cykloida...)

↳ najdete si ve Sbírce, jak se parametrizují,
a procvičte na cvičení.

Př.:

Navrhněte $P(t)$ pro část paraboly $y = x^2 + 1$ (tj. graf f-ce) mezi body $A = [3, 10]$ a $B = [1, 2]$ ← koncový!

Tip: Pokud $y = f(x)$, volím $x(t) = t$ a druhá souřadnice je automaticky $y(t) = f(t)$.

Zde tento návrh postupu vede na:

$P(t)$: $x(t) = t$

↳ $y(t) = ?$ → dosadím za x ⇒ $y(t) = t^2 + 1$.

Ale $t \in$?

Př.: (opačný postup)

Mějme dánu parametrizaci $P(\varphi)$: $x = 2\cos\varphi$, $y = 2 + 2\sin\varphi$, $\varphi \in \langle \pi/2, 3\pi/2 \rangle$.

Nakreslete křivku, která je nesouhlasně orientována s $P(\varphi)$.

Řešení:

Abych se zbavil φ a získal r-ci křivky, sečtu:

$$x^2 + y^2 = 4\cos^2\varphi + (4 + 8\sin\varphi + 4\sin^2\varphi)$$

Jednoduchá po částech hladká křivka

Na tabuli.

III.1.8. Jednoduchá po částech hladká křivka. Předpokládejme, že $C_1, \dots, C_n$ jsou jednoduché hladké křivky v $\mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$) takové, že

a) $k.b.\,C_1 = p.b.\,C_2$, $k.b.\,C_2 = p.b.\,C_3, \dots, k.b.\,C_{n-1} = p.b.\,C_n$,

b) kromě bodů zmíněných v a) a kromě možného případu, kdy $p.b.\,C_1 = k.b.\,C_n$, nemají žádné dvě z křivek $C_1, \dots, C_n$ žádný další společný bod.

Pak sjednocení $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ nazýváme *jednoduchou po částech hladkou křivkou* v $\mathbb{E}_k$. (Zápis často zkracujeme na "jednoduchá p. č. hladká křivka".)

Orientace jednoduché p. č. hladké křivky C je dána orientací jejích jednotlivých hladkých částí $C_1, \dots, C_n$. Pokládáme $p.b.\,C = p.b.\,C_1$ (počáteční bod C) a $k.b.\,C = k.b.\,C_n$ (koncový bod C).

Křivku, která se od C liší pouze orientací, označujeme $-C$.

Jednoduchá p. č. hladká křivka C se nazývá *uzavřená*, jestliže $p.b.\,C = k.b.\,C$.

III.1.8. Jednoduchá po částech hladká křivka. Předpokládejme, že $C_1, \ldots, C_n$ jsou jednoduché hladké křivky v $\mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$) takové, že

a) $k.b.\, C_1 = p.b.\, C_2$, $\;k.b.\, C_2 = p.b.\, C_3, \ldots, k.b.\, C_{n-1} = p.b.\, C_n$,

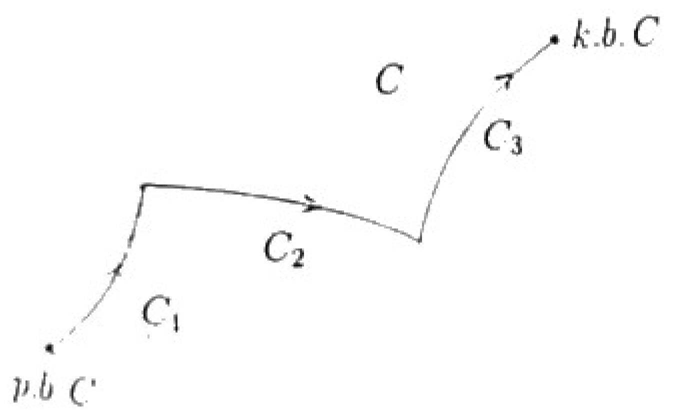
b) kromě bodů zmíněných v a) a kromě možného případu, kdy $p.b.\, C_1 = k.b.\, C_n$, nemají žádné dvě z křivek $C_1, \ldots, C_n$ žádný další společný bod.

Pak sjednocení $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$ nazýváme *jednoduchou po částech hladkou křivkou* v $\mathbb{E}_k$. (Zápis často zkracujeme na "jednoduchá p. č. hladká křivka".)

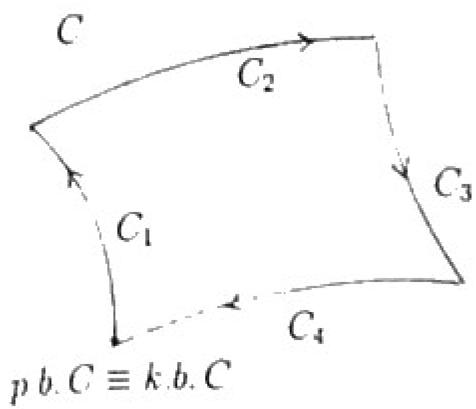
Orientace jednoduché p. č. hladké křivky C je dána orientací jejích jednotlivých hladkých částí $C_1, \ldots, C_n$. Pokládáme $p.b.\, C = p.b.\, C_1$ (počáteční bod C) a $k.b.\, C = k.b.\, C_n$ (koncový bod C).

Křivku, která se od C liší pouze orientací, označujeme $-C$.

Jednoduchá p. č. hladká křivka C se nazývá *uzavřená*, jestliže $p.b.\, C = k.b.\, C$.



Obr. 18a



Obr. 18b

Na obr. 18a a 18b vidíte příklady jednoduchých p. č. hladkých křivek. Křivka na obr. 18b je uzavřená.

Abychom mohli s parametrizací počítat, (pokračovat v integr.) co vše musíme mít připravené?

---

a) návrh f-cí $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, tj. prostě předpis pro $P(t)$

b) interval pro t

c) orientaci $P(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$

d) $\dot{P}(t)$

e) $\| \dot{P}(t) \|$ ▪