Matematika II – přednáška 17

Co bude dneska?

Křivkový integrál vektorové funkce.

Základní vlastnosti křivkového integrálu vektorové funkce.

Fyzikální význam křivkového integrálu vektorové funkce.

Souvislosti mezi křivkovým integrálem skalární a vektorové funkce.

Nějaké příklady

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

Křivkový integrál skalární funkce (1.druhu).

Výpočet, vlastnosti, použití.

Křivkový integrál skalární funkce (KI 1.druhu) - opakování

Definice (křivkový integrál skalární funkce na jednoduché hladké křivce). Nechť C je jednoduchá hladká křivka v $\mathbb{E}_2$ nebo v $\mathbb{E}_3$ a P je její parametrizace, definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť f je funkce, která je definovaná a omezená na křivce C. Existuje-li Riemannův integrál $\int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\| \, dt$, pak o funkci f říkáme, že je *integrovatelná* na křivce C. *Křivkový integrál* skalární funkce f na křivce C pak označujeme $\int_C f \, ds$ a definujeme jej rovnicí

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\| \, dt.$$

Říkáme, že “funkce f je integrovatelná na křivce C” či, že “křivkový integrál funkce f na C existuje”.

Křivkový integrál 2. druhu

Kolik energie je třeba dodat, aby míček dolétl do jamky?

Spotřeba paliva

Vektorová funkce

Používá se buď pojem vektorová funkce nebo vektorové pole. (viz. obrázek).

Značení: Vektorové funkce v $\mathbb{E}_3$ budeme většinou zapisovat:

$$\mathbf{f}(x,y,z)$$
$$= \big(U(x,y,z),\ V(x,y,z),\ W(x,y,z)\big) = U(x,y,z)\,\mathbf{i} + V(x,y,z)\,\mathbf{j} + W(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

nebo zkráceně $\mathbf{f} = (U,V,W) = U\,\mathbf{i} + V\,\mathbf{j} + W\,\mathbf{k}$.

(U, V a W jsou souřadnicové funkce vektorové funkce f.)

V případě vektorové funkce v $\mathbb{E}_2$ je situace stejná, pouze je zápis o jednu komponentu kratší.

Příklad na tabuli.

Fyzikální motivace

Na tabuli.

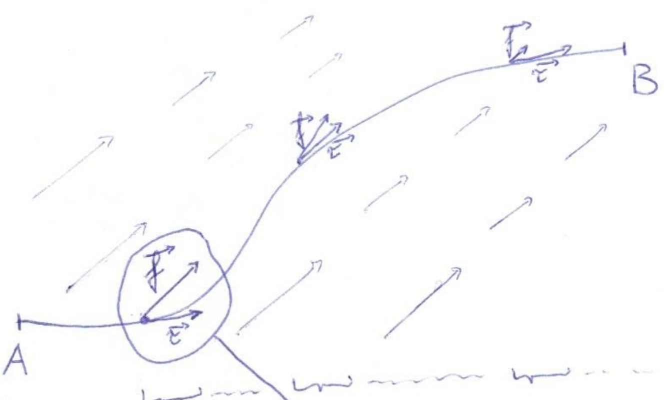
Vzpomínáte si na středoškolský vzoreček pro práci vykonanou silou $\vec{f}$ po dráze o délce l ?

$(A =)\ W = f \cdot l \cdot \cos \alpha$, kde α je úhel sevřený mezi vektorem síly $\vec{f}$ a přímkou, po které se těleso pohybuje

Tak tím se teď budeme zabývat.

Rozdíl? Dovolíme <u>síle $\vec{f}$</u>, aby byla v každém bodě jiná (a ne konstantní jako předtím)

a přímku nahradíme <u>lib. křivkou.</u>



Příspěvky k vykonané práci / spotřebované energii jsou

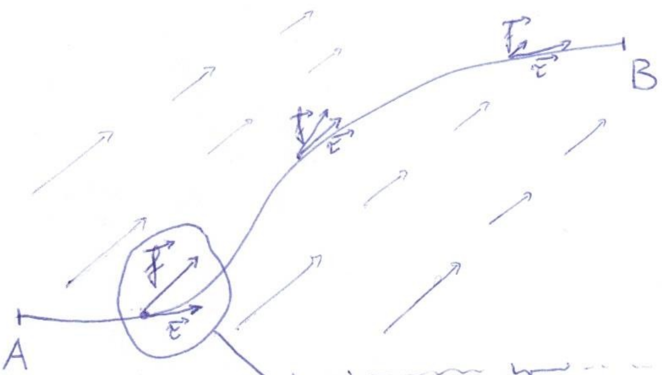
Vzpomínáte si na středoškolský vzoreček pro práci vykonanou silou $\vec{f}$ po dráze o délce l ?

$$(A=)\ W = f\cdot l\cdot \cos\alpha,$$ kde α je úhel sevřený mezi vektorem síly $\vec{f}$ a přímkou, po které se těleso pohybuje

Tak tím se teď budeme zabývat.

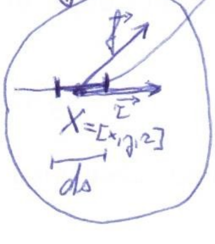
Rozdíl? Dovolíme <u>síle $\vec{f}$</u>, aby byla v každém bodě jiná (a ne konstantní jako předtím)

a přímku nahradíme <u>lib. křivkou.</u>



Příspěvky k vykonané práci / spotřebované energii jsou

$$dA = \vec{f}(x,y,z)\cdot\vec{\tau}(x,y,z)\,ds$$



Fyzikální význam: k práci přispívá jen ta část síly, která působí ve směru pohybu, tj. průmět $\vec{f}$ do směru $\vec{\tau}$, matematicky $\vec{f}\cdot\vec{\tau}$.

Celkem pak

$$A=(W=)\int_C dA$$

$$= \int_C \vec{f}(x,y,z)\cdot\vec{\tau}(x,y,z)\,ds \quad \left(= \int_C \vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{s}\right)$$

← ve smyslu $\vec{\tau}\,ds = d\vec{s}$, neboli $d\vec{s}$ je vektor o délce ds a směru $\vec{\tau}$.

Křivkový integrál vektorové funkce - definice

Definice (křivkový integrál vektorové funkce). Nechť C je jednoduchá po částech hladká křivka v $\mathbb{E}_k$ (kde $k = 2$ nebo $k = 3$) a $\mathbf{f}$ je vektorová funkce, která je definovaná a omezená na křivce C. Říkáme, že vektorová funkce $\mathbf{f}$ je *integrovatelná* na křivce C, je-li skalární funkce $\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}$ integrovatelná na C. Integrál $\int_C \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} \; ds$ nazýváme *křivkovým integrálem* vektorové funkce $\mathbf{f}$ na křivce C a označujeme jej kratším způsobem $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$.

Místo "křivkový integrál vektorové funkce" se často používá název *křivkový integrál 2. druhu*.

Základním významem je práce kterou vykoná síla $\mathbf{f}$ působící po dráze C.

Zápisy KI 2.druhu

Z definice vyplývá, že zapisujeme $\boldsymbol{\tau}\, ds = d\mathbf{s}$.

Zápisy KI 2.druhu

Z definice vyplývá, že zapisujeme $\boldsymbol{\tau}\, ds = d\mathbf{s}$.

$d\mathbf{s}$ je nekonečně krátký vektor, jehož složky jsou dx, dy a dz. Použijeme-li toto značení, můžeme psát

$$\boldsymbol{\tau}\, ds \;=\; d\mathbf{s} \;=\; (dx, dy, dz) \;=\; \mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy + \mathbf{k}\, dz.$$

Zápisy KI 2.druhu

Z definice vyplývá, že zapisujeme $\boldsymbol{\tau}\, ds = d\mathbf{s}$.

$d\mathbf{s}$ je nekonečně krátký vektor, jehož složky jsou dx, dy a dz. Použijeme-li toto značení, můžeme psát

$$\boldsymbol{\tau}\, ds \;=\; d\mathbf{s} \;=\; (dx, dy, dz) \;=\; \mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy + \mathbf{k}\, dz.$$

$\mathbf{f}$ je vektorová funkce, když ji rozepíšeme do složek jako $\mathbf{f} = (U, V, W)$, pak můžeme skalární součin $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ vyjádřit jako:

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \;=\; (U, V, W) \cdot (dx, dy, dz) \;=\; U\, dx + V\, dy + W\, dz$$

a křivkový integrál funkce $\mathbf{f}$ lze potom zapsat jako

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \;=\; \int_C \big(U\, dx + V\, dy + W\, dz\big).$$

Příklad na tabuli.

Důležité vlastnosti křivkového integrálu vektorové funkce

Křivkový integrál vektorové funkce je definován pomocí křivkového integrálu skalární funkce, tj. vlastnosti zůstávají stejné.

Vyjímkou je

Věta. *Je-li vektorová funkce* $\mathbf{f}$ *integrovatelná na křivce* C, *pak je integrovatelná i na křivce* $-C$ *a*

$$\int_{-C} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{C} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

Změní-li se znaménko tečného vektoru tak se též změní znaménko celého integrálu.

Důkaz závislosti na orientaci

Počítejme $\int_{-C} \vec{f}\cdot d\vec{s}$.

Protože je křivka $-C$ opačně orientovaná (než C), je i její tečný vektor opačně orientovaný

$$\vec{\tau}_{-C} = -\vec{\tau}_{C}.$$

Pak

$$\int_{-C} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{-C} \vec{f}\cdot\vec{\tau}_{-C}\, ds = \int_{-C} \vec{f}\cdot(-\vec{\tau}_{C})\, ds$$

$$= -\int_{C} (\vec{f}\cdot\vec{\tau}_{C})\, ds = -\int_{C} \vec{f}\cdot d\vec{s} \qquad \blacksquare$$

Memotechnická pomůcka

křivk. int. ze skalární f-ce = $\int_C f\, ds$ má fyz. význam např. hmotnosti drátu

tj. ta nezávisí na tom, kde má drát začátek a konec

křivk. int. ze vektorové f-ce = $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s}$ má fyz. význam vykonané práce podél křivky

tj. ta závisí na orientaci křivky, aneb je rozdíl, jestli jdu do kopce nebo z kopce!

Výpočet křivkového integrálu vektorové funkce

Nechť $\mathbf{f} = (u, v, w)$ je vektorová funkce, C JHK a P je parametrizace křivky C definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Dále předpokládejme, že křivka C je orientována souhlasně s parametrizací P.

Výpočet křivkového integrálu vektorové funkce

Nechť $\mathbf{f} = (u, v, w)$ je vektorová funkce, C JHK a P je parametrizace křivky C definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Dále předpokládejme, že křivka C je orientována souhlasně s parametrizací P.

Jednotkový tečný vektor v každém bodě $P(t)$ ($t \in \langle a, b\rangle$) křivky C je $\boldsymbol{\tau} = \dot{P}(t)/\|\dot{P}(t)\|$

Výpočet křivkového integrálu vektorové funkce

Nechť $\mathbf{f} = (u, v, w)$ je vektorová funkce, C JHK a P je parametrizace křivky C definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Dále předpokládejme, že křivka C je orientována souhlasně s parametrizací P.

Jednotkový tečný vektor v každém bodě $P(t)$ ($t \in \langle a, b \rangle$) křivky C je $\boldsymbol{\tau} = \dot{P}(t)/\|\dot{P}(t)\|$

Dostáváme

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}\, ds = \int_a^b \mathbf{f}(P(t)) \cdot \frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}\, \|\dot{P}(t)\|\, dt,$$

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(P(t)) \cdot \dot{P}(t)\, dt.$$

Výpočet křivkového integrálu vektorové funkce

Nechť $\mathbf{f} = (u, v, w)$ je vektorová funkce, C JHK a P je parametrizace křivky C definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Dále předpokládejme, že křivka C je orientována souhlasně s parametrizací P.

Jednotkový tečný vektor v každém bodě $P(t)$ ($t \in \langle a, b\rangle$) křivky C je $\boldsymbol{\tau} = \dot{P}(t)/\|\dot{P}(t)\|$

Dostáváme

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}\, ds = \int_a^b \mathbf{f}(P(t)) \cdot \frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}\, \|\dot{P}(t)\|\, dt,$$

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(P(t)) \cdot \dot{P}(t)\, dt.$$

Pozn.: opačně orientovaný tečný vektor, vzorec v $\mathbb{E}_2$, po částech JHK.

Příklady na tabuli.

Def: Je-li křivka C jednoduchá po částech hladká křivka (JpčHK), tj. dá-li se zapsat jako $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, kde křivky C_i jsou JHK, pak křivkový integrál z vekt. f-ce po křivce definujeme jako

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} \vec{f} \cdot d\vec{s},$$

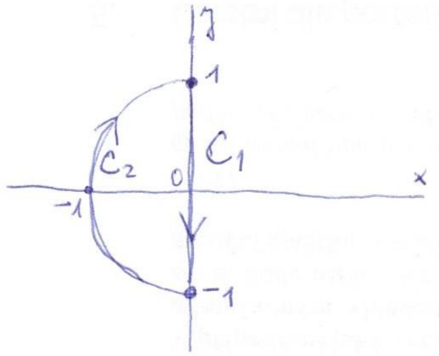
za předpokladu, že jednotlivé integrály $\int_{C_i} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ existují.

Př.: Jakou práci vykoná síla $\vec{f}$ po křivce C?

$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = ?$, kde $C = C_1 \cup C_2$, C_1 = úsečka mezi $[0,1]$ a $B = [0,-1]$

C_2 = půlkružnice $x^2+y^2=1$, $\cancel{y}\, \le 0$ a $A = [0,-1]$

, $\vec{f} = (y, -x)$.



Parametrizace:

C_1:

$x = 0$

$y = 1 - 2t$, $t \in \langle 0,1 \rangle$, souhlasné orient.

Dále

$$\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_{C_1} \vec{f}\cdot d\vec{s}}_{I_1} + \underbrace{\int_{C_2} \vec{f}\cdot d\vec{s}}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_{C_1} (y,-x)\cdot d\vec{s} = \int_0^1 (1-2t,\, 0)\cdot (0,-2)\, dt \overset{!}{=} \int_0^1 0+0\, dt = \underline{\underline{0}}$$

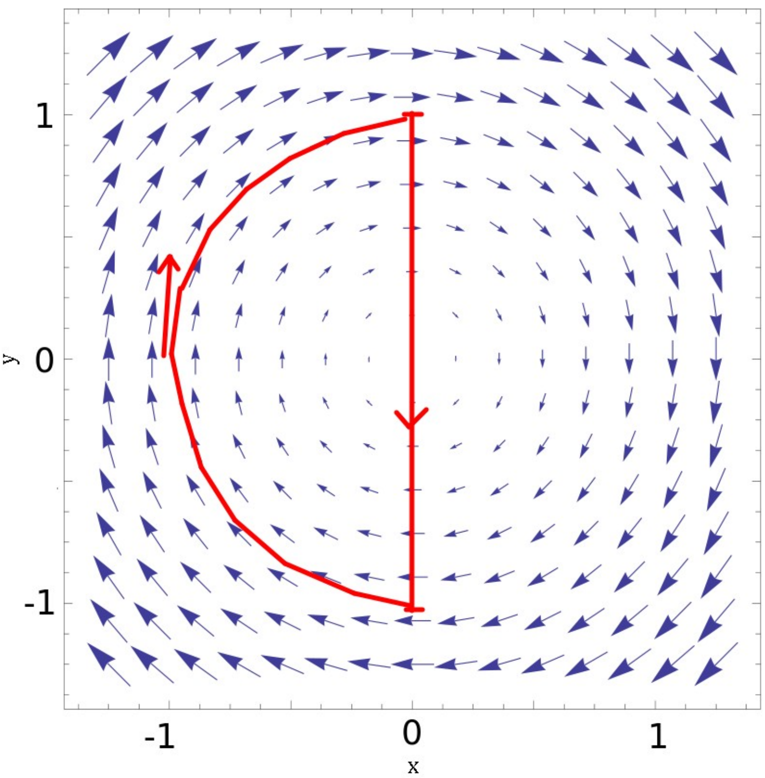
$$I_2 = \int_{C_2} (y,-x)\cdot d\vec{s} = \int_a^b \mathbf{f}(P(t))\cdot \dot{P}(t)\, dt.$$

$$= -\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\sin t, -\cos t)\cdot \underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{\dot{P}_2(t)}\, dt = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1}\, dt = \left[t\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \underline{\underline{\pi}}$$

orientace

$$\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = I_1 + I_2 = 0 + \pi = \underline{\underline{\pi}}$$

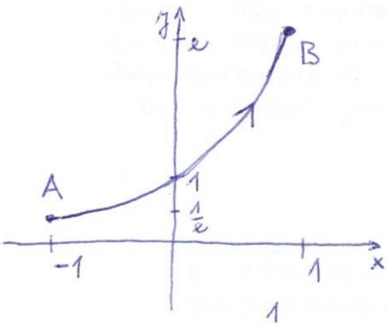
Výsledná práce je π [jednotek].



Př.:

Vypočítejte $\int\limits_C dx + \frac{1}{y}\ln y \, dy$, kde C je dána $y = e^x$, $|x| \le 1$ a počátek má $x = -1$.

Ř.: $\vec{f} = \left(1, \frac{1}{y}\ln y\right) \rightarrow y \neq 0 \wedge y > 0 \Rightarrow D_f = \{[x,y] \in E^2 \mid y > 0\}$.



P(t):

$x = t$
$y = e^t$ $\quad t \in \langle -1, 1 \rangle$, $\quad P(-1) = [-1, \frac{1}{e}] = A$

souhlasné orient.

$\dot{P}(t) = (1, e^t)$.

$$I = +\int_{-1}^{1} \left(1, \frac{1}{e^t} \ln e^t\right) \cdot \left(1, e^t\right) dt = \int_{-1}^{1} 1 + \underbrace{\ln e^t}_{t} \, dt = \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = 2$$

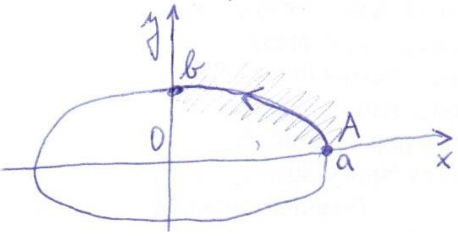
$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(P(t)) \cdot \dot{P}(t) \, dt.$$

Př.:

Jakou energii spotřebuje působením síly $\vec{f}$ po dráze dané křivkou C?

$$\int_C (-y, x) \cdot d\vec{s} = ? \,, \quad C \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \,, \; x \geq 0 \,, \; y \geq 0 \,, \; A = [a, 0].$$

→ elipsa o poloosách a, b



P(t):

$$x = a \cos t$$
$$y = b \sin t \,, \qquad t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$$

ověřím: