

Matematika II – přednáška 18

Co bude dneska?

Křivkový integrál vektorové funkce po uzavřené křivce.

Greenova věta.

Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese

<http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php>

(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

Křivkový integrál vektorové funkce (2.druhu).

Výpočet, vlastnosti, použití.

Křivkový integrál skalární funkce (KI 1.druhu) - opakování

Definice (křivkový integrál skalární funkce na jednoduché hladké křivce). Nechť C je jednoduchá hladká křivka v \mathbb{E}_2 nebo v \mathbb{E}_3 a P je její parametrizace, definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$. Nechť f je funkce, která je definovaná a omezená na křivce C . Existuje-li Riemannův integrál $\int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\| dt$, pak o funkci f říkáme, že je *integrovatelná* na křivce C . *Křivkový integrál* skalární funkce f na křivce C pak označujeme $\int_C f ds$ a definujeme jej rovnicí

$$\int_C f ds = \int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\| dt.$$

Říkáme, že “funkce f je integrovatelná na křivce C ” či, že “křivkový integrál funkce f na C existuje”.

Křivkový integrál vektorové funkce (KI 2.druhu) - opakování

Definice (křivkový integrál vektorové funkce). Nechť C je jednoduchá po částech hladká křivka v \mathbb{E}_k (kde $k = 2$ nebo $k = 3$) a \mathbf{f} je vektorová funkce, která je definovaná a omezená na křivce C . Říkáme, že vektorová funkce \mathbf{f} je *integrovatelná* na křivce C , je-li skalární funkce $\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}$ integrovatelná na C . Integrál $\int_C \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$ nazýváme *křivkovým integrálem* vektorové funkce \mathbf{f} na křivce C a označujeme jej kratším způsobem $\int_C \mathbf{f} \cdot ds$.

$$\int_C \mathbf{f} \cdot ds = \int_a^b \mathbf{f}(P(t)) \cdot \dot{P}(t) dt.$$

Závisí na orientaci křivky.

Cirkulace vektorového pole po uzavřené křivce

Definice (Cirkulace vektorového pole po uzavřené křivce.). Nechť C je uzavřená křivka v \mathbb{E}_2 nebo v \mathbb{E}_3 a nechť \mathbf{f} je vektorové pole (= vektorová funkce), definované na C . Křivkový integrál $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ nazýváme *cirkulací* vektorového pole \mathbf{f} po křivce C . Abychom zdůraznili skutečnost, že C je uzavřená křivka, používáme místo $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ často označení

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

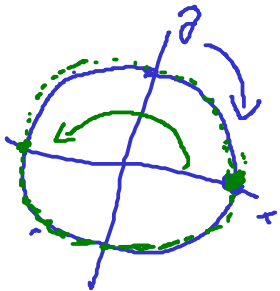
Příklad na tabuli.

$$\vec{F}: \vec{f} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ -x \end{pmatrix}$$

$$C: x^2 + y^2 = 16, \text{ ktoré je } \underline{\text{rejoná orientovaná}}$$

\Rightarrow po smere hod.
míčok

$$I = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_C u dx + v dy = ?$$

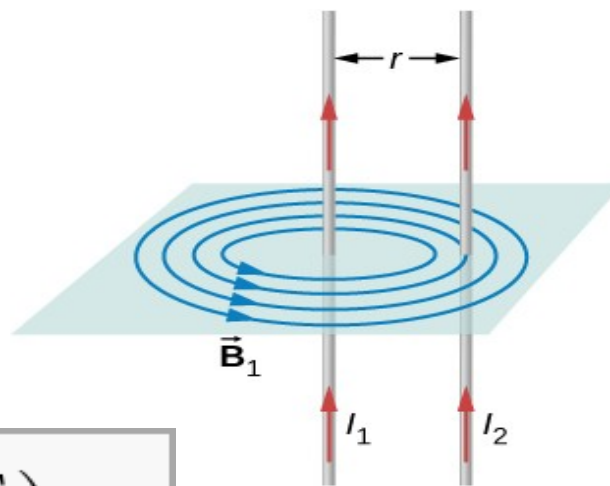


$$I = \int_a^b \vec{f}(P(t)) \cdot \underline{\underline{P'(t)}} dt =$$

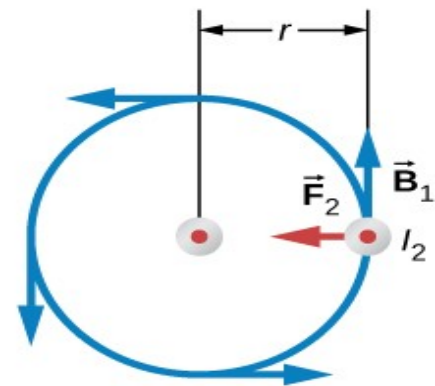
Motivace: Amperův zákon

- Říká, že proud vytváří magnetické pole a naopak
- Použití = přitažlivá/odpudivá síla dvou vodičů
- Pravidlo pravé ruky

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{celk}}$$



(a)



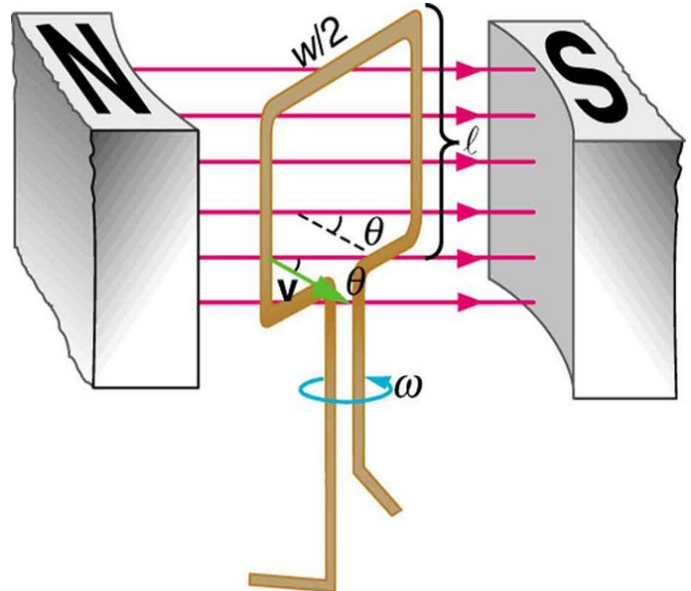
(b)

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \left(\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

Faradayův zákon

- *Zákon elektromagnetické indukce*, pojednává o vzniku elektrického napětí v uzavřeném obvodu

$$\mathcal{E}_F(t) = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

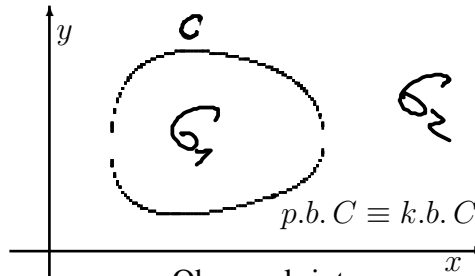


Jordanova věta

Věta (Jordanova věta.). *Nechť C je uzavřená křivka v \mathbb{E}_2 . Pak v \mathbb{E}_2 existují dvě disjunktní oblasti G_1 a G_2 takové, že C je jejich společnou hranicí a*

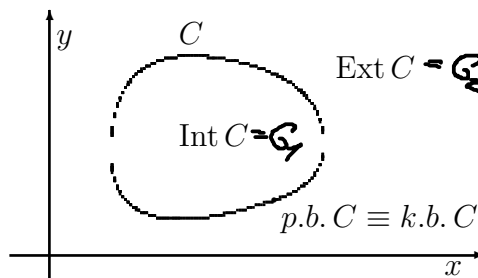
a) $\mathbb{E}_2 = G_1 \cup C \cup G_2$ a

b) jedna z oblastí G_1, G_2 je omezená a druhá je neomezená.



Vnitřek a vnějšek uzavřené křivky v \mathbb{E}_2

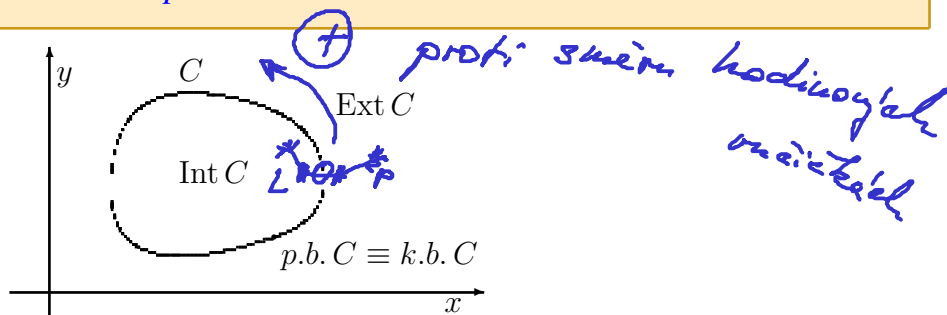
Definice (Vnitřek a vnějšek uzavřené křivky v \mathbb{E}_2). Nechť C je uzavřená křivka v \mathbb{E}_2 a G_1, G_2 jsou oblasti, jejichž existence je dána Jordanovou větou. Tu z oblastí G_1, G_2 , která je omezená, nazýváme *vnitřek* křivky C a značíme $\text{Int } C$. Druhou z oblastí G_1, G_2 , která je neomezená, nazýváme *vnějšek* křivky C a značíme ji $\text{Ext } C$.



Obr. ze skript

Kladná a záporná orientace uzavřené křivky v \mathbb{E}_2

Definice (Kladná a záporná orientace uzavřené křivky v \mathbb{E}_2). Nechť C je uzavřená křivka v \mathbb{E}_2 . Říkáme, že křivka C je orientována *kladně*, jestliže při oběhu po C ve směru její orientace máme vnitřek křivky C po levé ruce. (Viz obr.) V opačném případě říkáme, že křivka C je orientována *záporně*.



Obr. ze skript

⊖ po směru hod. ručiček

Greenova věta

Věta (Greenova věta). Předpokládejme, že

- $\mathbf{f} = (U, V)$ je vektorová funkce v oblasti $O \subset \mathbb{E}_2$ a souřadnicové funkce U, V mají v O spojité parciální derivace,
- C je kladně orientovaná uzavřená křivka v O taková, že $\text{Int } C \subset O$.

Pak platí:

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\text{Int } C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy.$$

křivkový int. \leftrightarrow plošný integrál (dvazij)

Greenova věta

Věta (Greenova věta). Předpokládejme, že

- a) $\mathbf{f} = (U, V)$ je vektorová funkce v oblasti $O \subset \mathbb{E}_2$ a souřadnicové funkce U, V mají v O spojité parciální derivace,
- b) C je kladně orientovaná uzavřená křivka v O taková, že $\text{Int } C \subset O$.

Pak platí:

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\text{Int } C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy.$$

Poznámka: Pomocí rovnosti $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = U dx + V dy$ můžeme formuli zapsat ve tvaru

$$\oint_C (U dx + V dy) = \iint_{\text{Int } C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy.$$

Greenova věta

Věta (Greenova věta). Předpokládejme, že

- $\mathbf{f} = (U, V)$ je vektorová funkce v oblasti $O \subset \mathbb{E}_2$ a souřadnicové funkce U, V mají v O spojité parciální derivace,
- C je kladně orientovaná uzavřená křivka v O taková, že $\text{Int } C \subset O$.

Pak platí:

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\text{Int } C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy.$$

Poznámka: Pomocí rovnosti $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = U dx + V dy$ můžeme formuli zapsat ve tvaru

$$\oint_C (U dx + V dy) = \iint_{\text{Int } C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy.$$

Jsou-li předpoklady Greenovy věty splněny až na to, že křivka C je záporně orientovaná, platí vzorce se znaménkem “−” před integrály na pravých stranách.

a) $I = ?$ pomocí Greenovy V:

$$\vec{f} = (u, v) \quad \begin{array}{l} u = y \\ v = -x \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \end{array} \right. \quad ?$$

$$\hookrightarrow \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = - \iint_{\text{Int} C} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + dy =$$

Pr.:

$$f = \left(-\frac{1}{x^2}, 2x\right)$$

Kladu orient.

$$C_1: x^2 + y^2 = 1$$

$$C_2: x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$C_3: (x-2)^2 + y^2 = 1$$

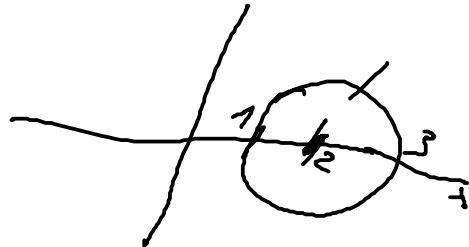
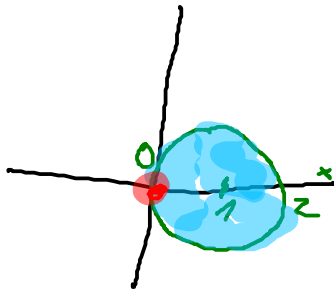
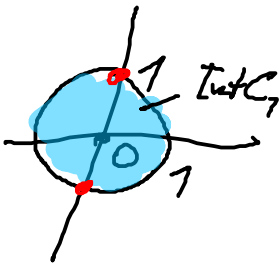
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$\oint_C f \cdot dt = ?$$

Lea použit GV? Když ano, tak použijte.

$$U(x, y) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

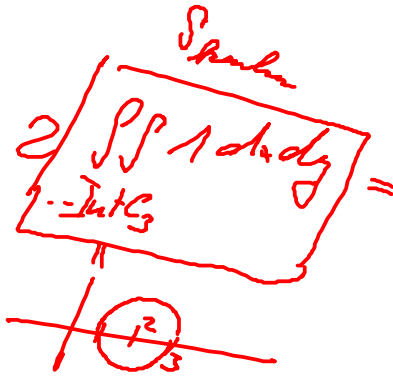
$$V(x, y) = 2x$$



Ad 3:

$$\int_{C_3} \vec{f} \cdot d\vec{s} = + \iint_{\text{Int } C_3} (2-0) dx dy = 2 \iint_{\text{Int } C_3} 1 dx dy =$$

Scheitel



~~12~~

$$= 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = \underline{\underline{2\pi}}$$