Matematika II – přednáška 19

Co bude dneska?

Nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na integrační cestě.

Jak to souvisí s cirkulací po uzavřené křivce.

Potenciální pole - definice, podmínky ... .

Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

Křivkový integrál vektorové funkce (2.druhu) po uzavřené křivce (Cirkulace).

Vnitřek a vnějšek uzavřené křivky.

Greenova věta.

Greenova věta - opakování

Věta (Greenova věta). *Předpokládejme, že*

a) $\mathbf{f} = (U, V)$ *je vektorová funkce v oblasti* $O \subset \mathbb{E}_2$ *a souřadnicové funkce* U, V *mají v* O *spojité parciální derivace,*

b) C *je kladně orientovaná uzavřená křivka v* O *taková, že* $\operatorname{Int} C \subset O$.

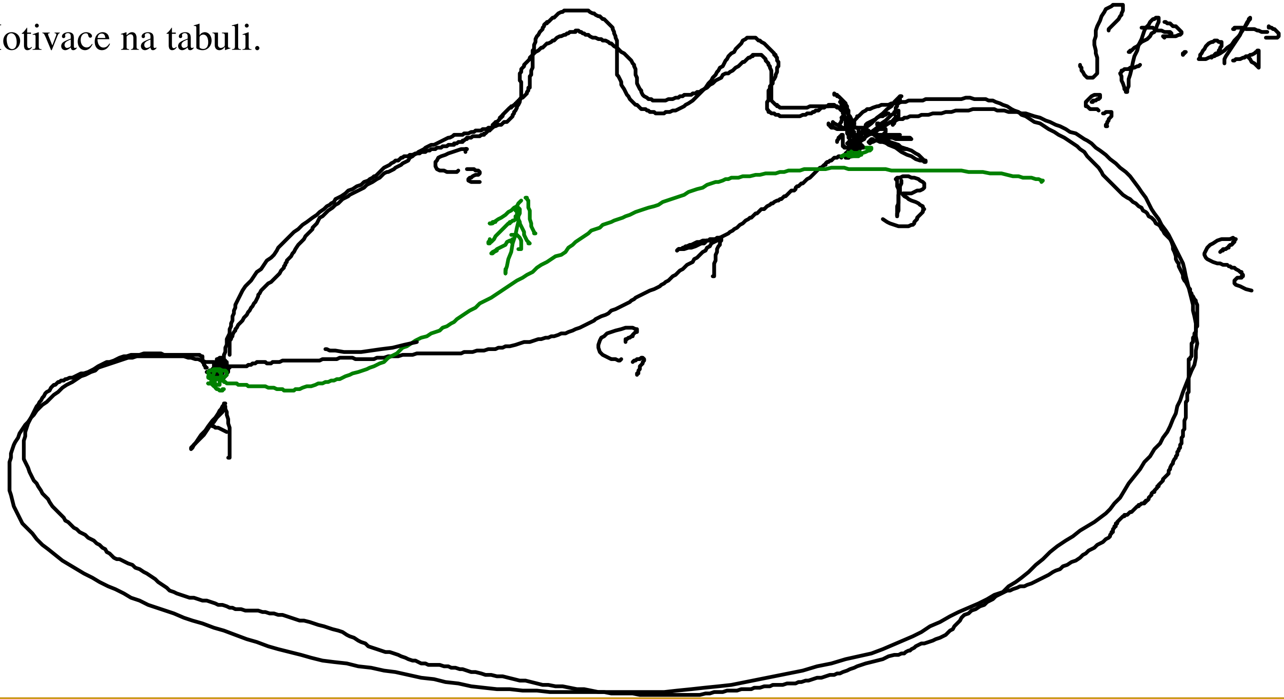
Pak platí:

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\operatorname{Int} C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Jsou-li předpoklady Greenovy věty splněny až na to, že křivka C je záporně orientovaná, platí vzorce se znaménkem “$-$” před integrály na pravých stranách.

Nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na integrační cestě

Motivace na tabuli.



Nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na integrační cestě

Motivace na tabuli.

Definice (Nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na integrační cestě.). Nechť $\mathbf{f}$ je k–rozměrné vektorové pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$). Jestliže pro libovolné dvě křivky K_1 a K_2 v D, které mají shodný počáteční i koncový bod (tj. $p.b.\ K_1 = p.b.\ K_2$ a $k.b.\ K_1 = k.b.\ K_2$), platí rovnost

$$\int_{K_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{K_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s},$$

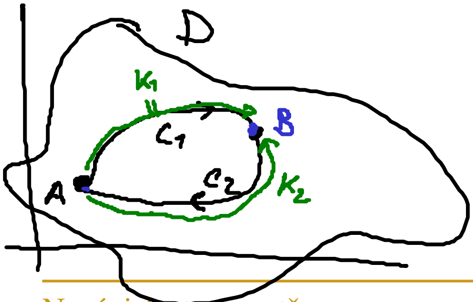
pak říkáme, že *křivkový integrál vektorové funkce* $\mathbf{f}$ *nezávisí v* D *na cestě*.

Věta. *Křivkový integrál vektorové funkce $\vec{\mathbf{f}}$ nezávisí v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ (kde $k = 2$ nebo $k = 3$) na cestě právě tehdy, když cirkulace $\vec{\mathbf{f}}$ po libovolné uzavřené křivce C v D je nulová.* $\iff$

Náznak důkazu na tabuli.

$\Rightarrow$: Předpokládáme, že $\vec{f}$ nezávisí na cestě.
Cíl je ukázat $\oint \vec{f}\,d\vec{r} = 0$.

$$C = C_1 \cup C_2$$



Potenciální vektorové pole

Definice (Potenciální vektorové pole.). Vektorové pole $\mathbf{f}$ v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$) nazýváme *potenciální pole* v D, jestliže existuje skalární pole (= skalární funkce) φ v D takové, že

$$\mathbf{f} \;=\; \operatorname{grad} \varphi$$

v D. Skalární funkci φ nazýváme *potenciál* vektorového pole $\mathbf{f}$ v D.

Potenciální vektorové pole

Definice (Potenciální vektorové pole.). Vektorové pole **f** v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$) nazýváme *potenciální pole* v D, jestliže existuje skalární pole (= skalární funkce) φ v D takové, že

$$\mathbf{f} = \operatorname{grad} \varphi$$

v D. Skalární funkci φ nazýváme *potenciál* vektorového pole **f** v D.

Nyní se omezíme na potenciální pole v $\mathbb{E}_2$, na konci semestru se též podíváme na $\mathbb{E}_3$.

Potenciální vektorové pole

Platí

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{y}}\right) \ (\text{pro k} = 2), \qquad \operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{z}}\right) \ (\text{pro k} = 3).$$

Potenciální vektorové pole

Platí

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \ (\text{pro k} = 2), \qquad \operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \ (\text{pro k} = 3).$$

$\|$

$\vec{f} = (u, v)$

Je-li **f** potenciální pole v oblasti D a $D' \subset D$, pak **f** je potenciální pole i v oblasti D'.

Potenciální vektorové pole

Platí

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{y}}\right) \ \text{(pro k} = 2), \qquad \operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{z}}\right) \ \text{(pro k} = 3).$$

Věta. *Je-li* $\mathbf{f}$ *potenciální pole v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_k$*, pak jeho potenciál* φ *je určen jednoznačně až na aditivní konstantu.*

To znamená, že:

a) $\varphi + c$ (kde c je libovolná reálná konstanta) je také potenciál $\mathbf{f}$ v D.

b) Jakýkoliv jiný potenciál ζ pole $\mathbf{f}$ v D se liší od φ nejvýše o aditivní konstantu. Jinými slovy: *je-li* ζ *také potenciál* $\mathbf{f}$ *v* D*, pak existuje konstanta* c *taková, že* $\zeta = \varphi + c$ v D.

Dk věty stručně na tabuli.

Potenciální vektorové pole

Věta. *Je-li* $\mathbf{f}$ *potenciální a spojité vektorové pole v oblasti* D, φ *je potenciál* $\mathbf{f}$ *v* D *a* C *je křivka v* D, *pak*

$$\Rightarrow \quad \varphi(B) - \varphi(A)$$

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \varphi(k.b.\,C) - \varphi(p.b.\,C).$$

Jak zjistit, zda je vektorové pole potenciální? Na tabuli.

Dk:

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_C \operatorname{grad} \varphi \cdot d\vec{s} = ?$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$$

Potenciální pole - opakování

V.1.6.

Věta. f *je potenciální vektorové pole v oblasti* D $\Leftrightarrow$ *Křivkový integrál vektorové funkce* f *nezávisí v* D *na integrační cestě.*

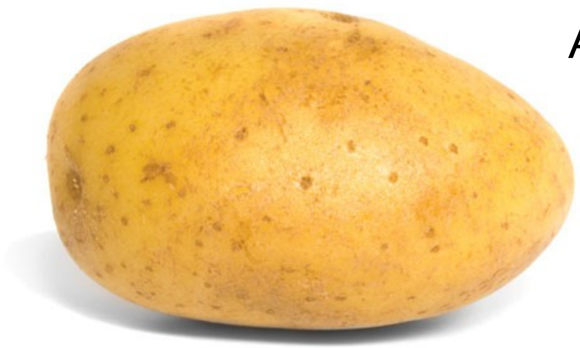
$\Leftrightarrow$

Cirkulace $\vec{f}$ po uzavřené křivce $= 0$ v D.

Jednoduše souvislá oblast

nebo též v E2

Definice (Jednoduše souvislá oblast v E_3.). Oblast $D \subset \mathbb{E}_3$ nazýváme *jednoduše souvislou*, pokud každou uzavřenou křivku C v D můžeme spojitě změnit (stáhnout) v bod v D, aniž přitom kdykoliv oblast D opustíme.



ANO

NE

Potenciální pole - opakování

Věta. $\mathbf{f}$ *je potenciální vektorové pole v oblasti* D $\Leftrightarrow$ *Křivkový integrál vektorové funkce* $\mathbf{f}$ *nezávisí v* D *na integrační cestě.*

Věta (Potenciální pole v $\mathbb{E}_2$ – postačující podmínka.). *Nechť*

a) D *je jednoduše souvislá oblast v* $\mathbb{E}_2$ *a*

b) $\mathbf{f} = (U, V)$ *je vektorové pole v* D*, jehož souřadnicové funkce* U *a* V *mají v* D *spojité parciální derivace a splňují podmínku:*

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{v } D.$$

Pak $\mathbf{f}$ *je potenciální pole v* D*.*