Matematika II – přednáška 1

Kontakty, konzultace a Plán přednášek a Doporučená literatura

Informace na internetu na adrese ”fs.cvut.cz”

- v záložce ”Fakulta”vybrat ”Ústavy a vědecká pracoviště”

- vybrat ”12101 ÚTM”- přejít na interní webové stránky

- tam se najdou všechny informace o předmětu.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
Slidy nenahrazují skripta ani zápisky ani účast na přednášce a jsou pouze pro osobní potřeby.

Euklidův prostor $\mathbb{E}_n$. Body a množiny v $\mathbb{E}_n$

Nechť je n přirozené číslo, množinu všech n-tic reálných čísel označujeme $\mathbb{R}^n$ a nazýváme *n-rozměrný aritmetický prostor*.

Prvky $\mathbb{R}^n$ nazýváme *body*.

Body označujeme velkými písmeny a jejich souřadnice píšeme v hranatých závorkách.

Euklidův prostor $\mathbb{E}_n$. Body a množiny v $\mathbb{E}_n$

Nechť je n přirozené číslo, množinu všech n-tic reálných čísel označujeme $\mathbb{R}^n$ a nazýváme *n-rozměrný aritmetický prostor*.

Prvky $\mathbb{R}^n$ nazýváme *body*.

Body označujeme velkými písmeny a jejich souřadnice píšeme v hranatých závorkách.

Jestliže definujeme vzdálenost dvou bodů (na tabuli)
Stává se z $\mathbb{R}^n$ tak zvaný *n-rozměrný Euklidův prostor*. Který označujeme $\mathbb{E}_n$.

Za počátek souřadného systému uvažujeme bod $O = [0, 0, \ldots 0]$.

Příklady z M1: $\mathbb{E}_1$ přímka, $\mathbb{E}_2$ rovina, $\mathbb{E}_3$ prostor (3D).

Připomenutí, vektor a délka vektoru.

Okolí bodu v $\mathbb{E}_n$. Prstencové okolí bodu v $\mathbb{E}_n$

na tabuli

Okolí bodu v $\mathbb{E}_n$. Prstencové okolí bodu v $\mathbb{E}_n$

na tabuli

Vnitřní bod množiny. Hraniční bod množiny

na tabuli

Okolí bodu v $\mathbb{E}_n$. Prstencové okolí bodu v $\mathbb{E}_n$

na tabuli

Vnitřní bod množiny. Hraniční bod množiny

na tabuli

Vnitřek množiny. Otevřená množina. Hranice množiny.

Uzavřená množina. Omezená množina

na tabuli definice a některé vlastnosti.

Posloupnost bodů v $\mathbb{E}_n$ a Limita posloupnosti

Definice (posloupnost). *Každé zobrazení množiny přirozených čísel* $\mathbb{N}$ *do* $\mathbb{E}_n$ *nazýváme posloupností v* $\mathbb{E}_n$

.

Značíme jako $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ nebo $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ nebo jenom krátce $\{X_k\}$.

Posloupnost bodů v $\mathbb{E}_n$ a Limita posloupnosti

Definice (posloupnost). *Každé zobrazení množiny přirozených čísel* $\mathbb{N}$ *do* $\mathbb{E}_n$ *nazýváme posloupností v* $\mathbb{E}_n$

.

Značíme jako $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ nebo $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ nebo jenom krátce $\{X_k\}$.

Definice (limita posloupnosti v $\mathbb{E}_n$.). *Bod* $A \in \mathbb{E}_n$ *nazýváme limitou posloupnosti* $\{X_k\}$, *jestliže*

$$\lim_{k \to +\infty} \|X_k - A\| = 0.$$

Používáme značení: $\lim_{k \to +\infty} X_k = A$, $\quad \lim X_k = A \quad$ *nebo pouze* $\quad X_k \longrightarrow A.$

Posloupnost bodů $\{X_k\}$ v $\mathbb{E}_n$, která má v $\mathbb{E}_n$ limitu, se nazývá *konvergentní*. Je-li limitou bod A, říkáme, že posloupnost $\{X_k\}$ *konverguje* k bodu A.

Věta. *Posloupnost bodů* $\{X_k\}$ *v* $\mathbb{E}_n$ *může mít nejvýše jednu limitu.*

Úvaha je zde stejná jako pro limitu posloupnosti reálných čísel. Není možné, aby se vzdálenost bodu A blížila k nule vzhledem ke dvěma různým bodům

Věta. *Posloupnost bodů* $\{X_k\}$ *v* $\mathbb{E}_n$ *může mít nejvýše jednu limitu.*

Úvaha je zde stejná jako pro limitu posloupnosti reálných čísel. Není možné, aby se vzdálenost bodu A blížila k nule vyhledem ke dvěma různým bodům

Věta. *Nechť* $\{X_k\}$ *je posloupnost bodů v* $\mathbb{E}_n$*, přičemž* $X_k = [x_{1k}, \dots, x_{nk}]$*. Nechť* $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{E}_n$*. Pak*

$$\lim_{k \to +\infty} X_k = A \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k \to +\infty} x_{ik} = a_i \text{ pro všechna } i = 1, 2, \dots, n.$$

Věta říká, že limitu je možno počítat ”po souřadnicích”.

Příklady na tabuli

Funkce n proměnných. Definiční obor a zápis funkce

Funkce n proměnných. Definiční obor a zápis funkce

Definice (Funkce n proměnných). *Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{E}_n$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení f množiny M do $\mathbb{R}$ nazýváme funkcí n proměnných.*

Hodnotami funkce f jsou reálná čísla, proto též hovoříme o reálné funkci n proměnných.

Množinu M nazýváme *definičním oborem* funkce f a značíme ji $D(f)$.

Funkce n proměnných. Definiční obor a zápis funkce

Definice (Funkce n proměnných). *Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{E}_n$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení f množiny M do $\mathbb{R}$ nazýváme funkcí n proměnných.*

Hodnotami funkce f jsou reálná čísla, proto též hovoříme o reálné funkci n proměnných.

Množinu M nazýváme *definičním oborem* funkce f a značíme ji $D(f)$.

Obor Hodnot funkce, Graf funkce na tabuli

Příklady na definiční obor funkce na tabuli.