Matematika II – přednáška 23

Co bude dneska?

Plošný integrál vektorové funkce (plošný integrál 2. druhu)

Souvislost plošného integrálu vektorové funkce a plošného integrálu skalární funkce.

Tok vektorového pole plochou.

Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

Plošný integrál skalární funkce (plošný integrál 1. druhu)

Obsah plochy, mechanické charakteristiky plochy.

Plošný integrál skalární funkce (plošný integrál 1. druhu) - definice

Definice (Plošný integrál skalární funkce na jednoduché hladké ploše.). Nechť σ je jednoduchá hladká plocha v $\mathbb{E}_3$ a P je její parametrizace, definovaná na množině $B \subset \mathbb{E}_2$. Nechť f je funkce, která je definovaná a omezená na ploše σ. Existuje-li dvojný integrál $\iint_B f(P(u,v))\,\|P_u(u,v) \times P_v(u,v)\|\,du\,dv$, pak o funkci f říkáme, že je *integrovatelná* na ploše σ. *Plošný integrál* funkce f na ploše σ pak označujeme $\iint_\sigma f\ dp$ a definujeme jej rovnicí

$$\iint_\sigma f\ dp = \iint_B f(P(u,v))\,\|P_u(u.v) \times P_v(u,v)\|\,du\,dv.$$

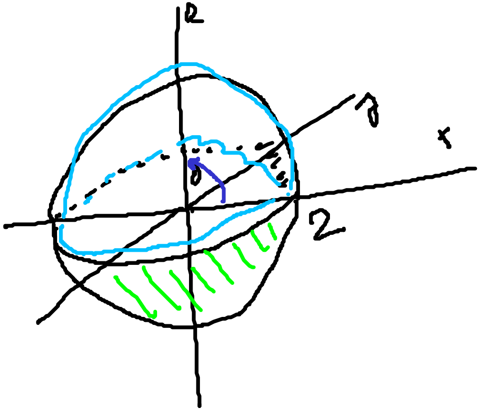
Výpočet integrálu vpravo ukážeme na příkladech.

Pozn.: Výroky "funkce f je integrovatelná na ploše σ" a "plošný integrál f na σ existuje" mají stejný význam (jsou ekvivalentní).

Pozn.: Pro označení plošného integrálu též často objevuje dS nebo $d\sigma$ místo dp.

Pr.:

$$\iint_\sigma (x^2+y^2)\,dp = ? \quad ; \quad \sigma = \{x^2+y^2+z^2=4\}$$ .... kulová plocha



$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

$$\sigma_1 = \{X \in \sigma \mid z \geq 0\}$$

$$\sigma_2 = \{X \in \sigma \mid z < 0\}$$

$$z^2 = 4 - x^2 - y^2 \Rightarrow z = +\sqrt{4-x^2-y^2}$$

σ_1:

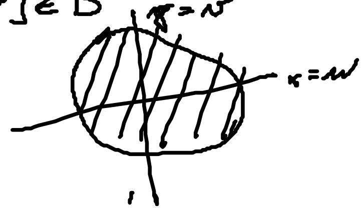
① $P(u,v)$:

$x = u$

$y = v$

$z = +\sqrt{4-u^2-v^2}$

$[u,v] \in B$



nevyhneme sa transf. do polárnych súradníc

② $P(\overset{\vartheta}{\overset{\|}{u}}, \overset{\varphi}{\overset{\|}{v}})$:

$x = 2\cos\vartheta\cos\varphi$

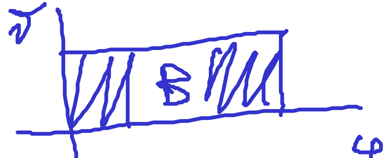
$y = 2\cos\vartheta\sin\varphi$

$z = 2\sin\vartheta$

B:

$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$\vartheta \in \langle 0, \pi/2 \rangle$

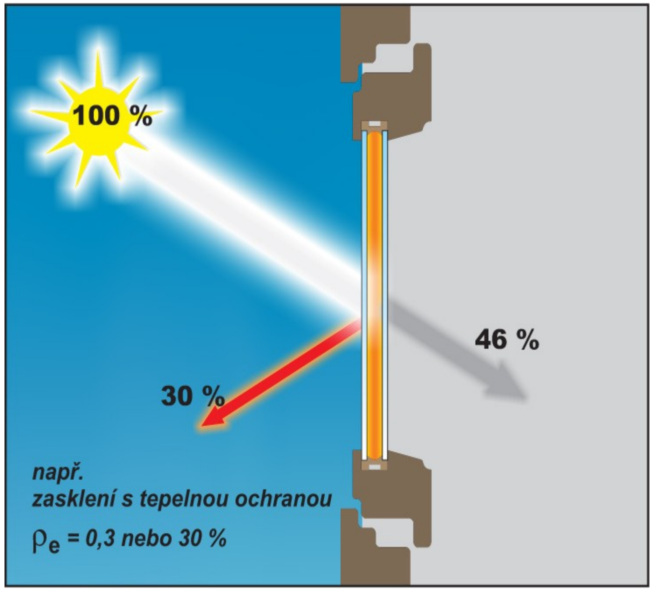


Plošný integrál vektorové funkce (plošný integrál 2. druhu) - motivace

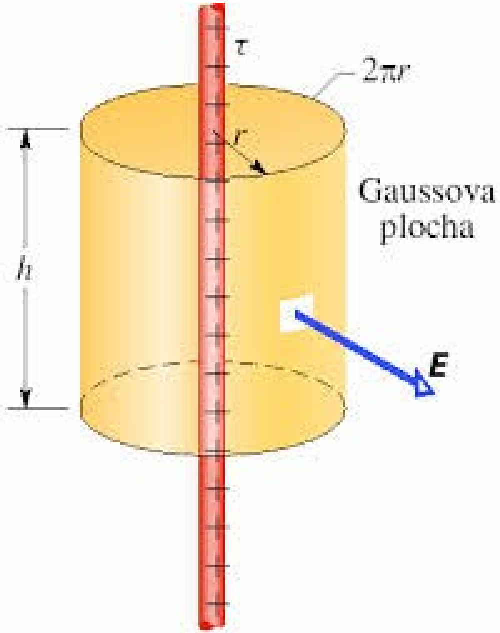
Na tabuli.

Plošný integrál z vektorové f-ce

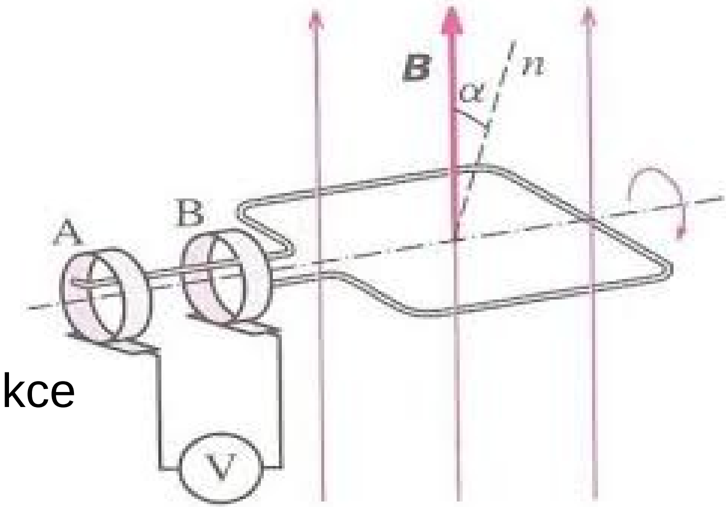
Tok vody



Tepelný tok

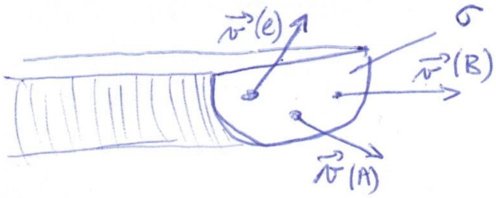


Gaussův zákon
o elektrické intenzitě

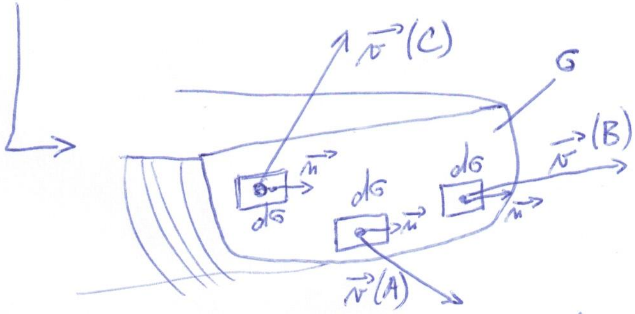


Faradayův zákon
elektromagnetické indukce

Chceme spočítat průtok vody skrz zadanou plochu.



A představme si hodně rozšířený proud vody popsaný vekt. polem rychlosti $\vec{v}$.



Pak celkový tok vody skrz plochu σ s orientací danou $\vec{n}$ spočítám vysčítáním ~~přes~~ příspěvků „malé elementy" plochy $d\sigma$.

Na elementu $d\sigma$ ale potřebuji zjistit, co teče ve směru normály (tj. ven/dovnitř dle orientace σ), tj.:

$$dQ = \vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)\,d\sigma$$ ← udělám průmět $\vec{v}$ do směru $\vec{n}$

(průtok označíme Q)

Celkem dostanu

jiný zápis s f-cí $\vec{f}$ místo $\vec{v}$

$$Q = \iint_\sigma dQ = \underline{\iint_\sigma \vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)\,d\sigma} \left(= \iint_\sigma \vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{p} \right)$$

Plošný integrál vektorové funkce (plošný integrál 2. druhu) - definice

Definice (Plošný integrál vektorové funkce.). Nechť σ je jednoduchá po částech hladká plocha v $\mathbb{E}_3$ a $\mathbf{f}$ je vektorová funkce, která je definovaná a omezená na ploše σ. Říkáme, že vektorová funkce $\mathbf{f}$ je *integrovatelná* na ploše σ, je-li skalární funkce $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ integrovatelná na σ. Integrál $\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dp$ nazýváme *plošný integrál vektorové funkce* $\mathbf{f}$ na ploše σ a označujeme jej kratším způsobem $\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p}$.

Plošný integrál vektorové funkce (= vektorového pole) $\mathbf{f}$ vyjadřuje *tok vektorového pole* $\mathbf{f}$ uvažovanou plochou. Tento integrál se často nazývá *plošný integrál 2. druhu*.

Souvislost plošného integrálu vektorové funkce a pl. integrálu skal. funkce.

Poznámka: Z definice plošného integrálu vektorové funkce $\mathbf{f}$ je patrné, že tento integrál je vlastně plošným integrálem skalární funkce $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$, což je průmět vektorové funkce $\mathbf{f}$ do směru kolmého k ploše σ. Plošný integrál vektorové funkce lze tudíž vyjádřit formulí

$$\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \iint_\sigma (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) \, dp.$$

Souvislost plošného integrálu vektorové funkce a pl. integrálu skal. funkce.

Poznámka: Z definice plošného integrálu vektorové funkce $\mathbf{f}$ je patrné, že tento integrál je vlastně plošným integrálem skalární funkce $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$, což je průmět vektorové funkce $\mathbf{f}$ do směru kolmého k ploše σ. Plošný integrál vektorové funkce lze tudíž vyjádřit formulí

$$\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \iint_\sigma (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})\, dp.$$

Poznámka: Normálový vektor $\mathbf{n}$ nemusí existovat v těch bodech jednoduché po částech hladké plochy σ, ve kterých se stýkají jednotlivé hladké plochy, ze kterých je po částech hladká plocha σ složena. Takové body tvoří nejvýše konečně mnoho jednoduchých po částech hladkých křivek a existence ani hodnota plošného integrálu na chování integrované funkce (pokud tato je omezená) na konečně mnoha křivkách nezávisí.

Zápisy plošného integrálu

Buď $\mathbf{f} = (U, V, W)$ pak tyto integrály

Předpokládejme, že vektorová funkce $\mathbf{f}$ má souřadnicové funkce U, V a W. Pak integrály

$$\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p}, \quad \iint_\sigma \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dp, \quad \iint_\sigma (U, V, W) \cdot d\mathbf{p}, \quad \iint_\sigma (U, V, W) \cdot \mathbf{n}\, dp,$$

$$\iint_\sigma (U\mathbf{i} + V\mathbf{j} + W\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{p}, \quad \iint_\sigma (U\mathbf{i} + V\mathbf{j} + W\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, dp$$

mají stejný význam.

Plošný integrál vektorové funkce - základní vlastnosti

Protože je plošný integrál vekt. fce $\mathbf{f}$ definován jako plošný integrál skal. fce $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})$ jsou základní vlastnosti obou integrálů stejné.

S jedním zásadním rozdílem: Plošný integrál vektorové funkce závisí na orientaci plochy!

Plošný integrál vektorové funkce - základní vlastnosti

Protože je plošný integrál vekt. fce $\mathbf{f}$ definován jako plošný integrál skal. fce $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})$ jsou základní vlastnosti obou integrálů stejné.

S jedním zásadním rozdílem: Plošný integrál vektorové funkce závisí na orientaci plochy!

Věta. *Je-li vektorová funkce* $\mathbf{f}$ *integrovatelná na ploše* σ, *pak je integrovatelná i na ploše* $-\sigma$ *a*

$$\boxed{\iint_{-\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = -\int_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p}.}$$

Toto tvrzení vyplývá z definice. Vektor $\mathbf{n}$ v $\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \ dp$ je normálový vektor, který ukazuje směrem jímž je plocha orientována. Změna orientace vede ke změně znaménka normálového vektoru.

Mnemotechnická pomůcka

plošný int. ze skalární f-ce ($\iint_\sigma f\,dp$) má fyz. význam např. hmotnosti desky,

tj. nezávisí na orientaci desky

plošný int. z vektorové f-ce ($\iint_\sigma \vec{f}\cdot d\vec{p}$) má fyz. význam toku daného pole

skrz plochu, např. tok vody skrz ústí hadice

a je velký rozdíl, jestli voda vtéká nebo vytéká!

Věta:

Nechť je zadané spojité vekt. pole **f**(x,y,z) na jednoduché hladké ploše σ a nechť je P(u,v) její souhlasně orientovaná parametrizace. Potom platí:

$$\iint_\sigma \mathbf{f}\cdot d\mathbf{p} = \iint_\sigma \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dp$$

$$= \iint_B \mathbf{f}(P(u,v)) \cdot \frac{P_u(u,v)\times P_v(u,v)}{\|P_u(u,v)\times P_v(u,v)\|}\,\|P_u(u,v)\times P_v(u,v)\|\,du\,dv,$$

$$\text{(IV.4.2)} \qquad \iint_\sigma \mathbf{f}\cdot d\mathbf{p} = \iint_B \mathbf{f}(P(u,v))\cdot\big(P_u(u,v)\times P_v(u,v)\big)\,du\,dv.$$

Výpočet plošného integrálu vektorové funkce

Na tabuli. Př.: $\iint_{\sigma_1} (0,0,z)\cdot\vec{n}\,d\sigma$; σ_1 = horní polovina kulové plochy orientované $\vec{n}$, že $\vec{n}[0,0,2] = (0,0,1)$.

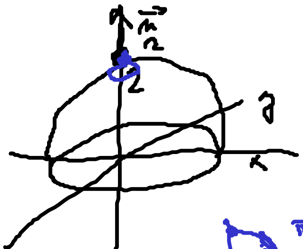
$P(\vartheta,\varphi)$ viz předchozí př.

$$x = 2\cos\vartheta\cos\varphi \qquad \vartheta \in \langle 0, \pi/2\rangle$$
$$y = 2\cos\vartheta\sin\varphi \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$$
$$z = 2\sin\vartheta$$

$$P_\vartheta \times P_\varphi = (-4\cos^2\vartheta\cos\varphi, -4\cos^2\vartheta\sin\varphi, -4\sin\vartheta\cos\vartheta)$$

nesouhl. orientace $P(\vartheta,\varphi)$.

$$P\left(\vartheta = \pi/2,\ \varphi \text{ lib.}\right) = [0,0,2]$$



PF:

$$\vec f = (0,0,r)$$

nesouhl. orientaci: param. s σ_1

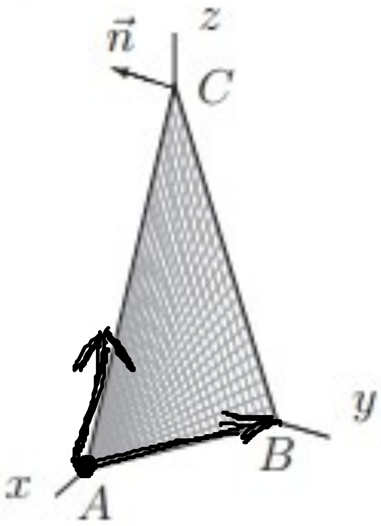
$$\iint_{\sigma_1} (0,0,r)\cdot \vec n \, d\sigma = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \big(0,\ 0,\ 2\sin\vartheta\big)\cdot\big(-4\cos^2\vartheta\cos\varphi,\ -4\cos^2\vartheta\sin\varphi,\ -4\sin\vartheta\cos\vartheta\big)\, d\varphi\, d\vartheta$$

$$= +\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 0+0+2\sin\vartheta\cdot\big(+4\sin\vartheta\cos\vartheta\big)\, d\vartheta\, d\varphi = 2$$

Určete tok Φ vektorového pole $\vec{f}$ plochou $Q \subset E_3$ orientovanou normálou $\vec{n}$:

***Příklad* 650.** $\vec{f} = (x, y - z, 2z)$, $\quad Q$ je trojúhelník o vrcholech A, B, C, kde
$A = [3,0,0]$, $B = [0,2,0]$, $C = [0,0,6]$, $\quad \vec{n} \cdot \vec{i} < 0$.

Řešení : ~~Tok vypočteme tentokrát podle definice, tj. převedením na integrál skalární funkce.~~



Př.: 650 (e-Sbírka)

σ: trojúhelník s vrcholy $A = [3,0,0]$
$B = [0,2,0]$
$C = [0,0,6]$

→ parametrizace? → více variant, jedna z nich viz e-Sbírka (r-ce roviny)

→ parametrický popis roviny pomocí 2 směr. vektorů:

$\vec{s_1} = \vec{AB} = (-3, 2, 0)$

$\vec{s_2} = \vec{AC} = (-3, 0, 6)$

Pak $\boxed{P(u,v) := A + u\vec{s_1} + v\vec{s_2}}$

neboli po složkách:

$P(u,v)$:

$x = 3 + u(-3) + v(-3)$

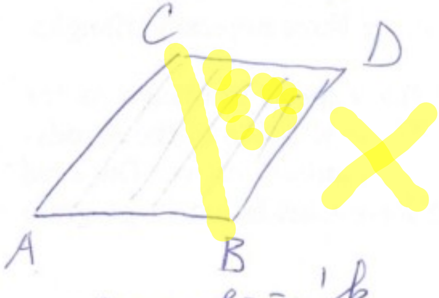
$y = 0 + u \cdot 2 + 0 \cdot v$

$z = 0 + 0 \cdot u + 6 \cdot v$

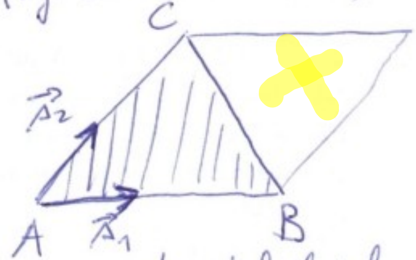
Množina B:

kdyby $u \in \langle 0,1 \rangle$, $v \in \langle 0,1 \rangle$ $\Rightarrow$ proto $u \in \langle 0,1 \rangle$, ~~$v \in \langle 0, 1-u \rangle$~~ $0 \le v \le 1-u$

(tj. součet $u+v=1$)



rovnoběžník



trojúhelník

$$P_u = (-3, 2, 0) = \vec{s}_1$$

$$P_v = (-3, 0, 6) = \vec{s}_2$$

$$P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}(12) - \vec{j}(-18) + \vec{k}(6)$$

$$= (12, 18, 6)$$

je $\overrightarrow{P_u \times P_v} \cdot \vec{i} < 0$?

$(12, 18, 6) \cdot (1, 0, 0) = 12$ není < 0 $\Rightarrow$ nesouhlasná orientace

$\vec{f} = (x, y-z, 2z)$

$$\iint_{S} \vec{f} \cdot d\vec{p} = -\iint_{B} \vec{f} \cdot \overrightarrow{P_u \times P_v} \, du \, dv = -\int_0^1 \int_0^{1-u} (3-3u-3v, 2u-6v, 12v) \cdot \boxed{(12, 18, 6)} \, dv \, du$$

$$= -\int_0^1 \int_0^{1-u} 36 - \cancel{36u} - 36v + \cancel{36u} - 6 \cdot 18v + 6 \cdot 12v \, dv \, du =$$

$$= -6 \int_0^1 \int_0^{1-u} 6 + v \underbrace{(-6 - 18 + 12)}_{-12} \, dv \, du$$

$$= -6 \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} 6(1-2v) \, dv \right) du =$$

$$= -36 \int_0^1 \left[v - \frac{v^2}{1} \right]_0^{1-u} du = -36 \int_0^1 (1-u) - (1+u^2-2u) \, du =$$

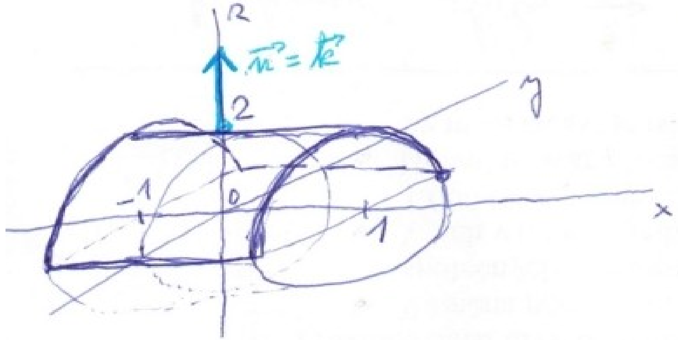
$$= -36 \int_0^1 -u^2 + u \, du = -36 \left[-\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} \right]_0^1 = -36 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{-6}}$$

Tok je -6 (jednotek).

IV.4.8. Příklad. Vypočítejme tok vektorového pole $\mathbf{f}(x, y, z) = yz\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ plochou σ, která je částí poloviny válcové plochy $y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, odříznutou rovinami $x = -1$ a $x = 1$. Plocha σ je orientovaná normálovým vektorem $\mathbf{n}$, který má v bodě $[0, 0, 2]$ tvar $\mathbf{n} = \mathbf{k}$.

$\sigma: \; y^2 + z^2 = 4, \; z \geq 0, \; -1 \leq x \leq 1 \;\rightarrow$ část válcové plochy

parametrizace (podobná polárním souřadnicím s pevným poloměrem)



$P(u,v)$:

$x = u \;\rightarrow\; u \in \langle -1, 1 \rangle$

$y = 2\cos v$

$z = 2\sin v \;\rightarrow\; v \in \langle 0, \pi \rangle$

$\hookrightarrow z = 2\sin v \geq 0$

$P_u = (1, 0, 0)$

$P_v = (0, -2\sin v, 2\cos v)$

$$P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sin v & 2\cos v \end{vmatrix} = \vec{i}(0) - \vec{j}(2\cos v) + \vec{k}(-2\sin v) =$$

$$= \underline{(0, -2\cos v, -2\sin v)}.$$

Bodu $A=[0,0,2]$ odpovídají hodnoty parametrů u,v:

$$
\begin{aligned}
x &= 0 = u \checkmark \\
y &= 0 = 2\cos v \\
z &= 2 = 2\sin v
\end{aligned}
\Bigg\} \Rightarrow v = \pi/2 \checkmark
$$

Pak

$$
\begin{aligned}
P_u \times P_v\,(u=0,\ v=\pi/2) &= (0,\ -2\cos \pi/2,\ -2\sin \pi/2) \\
&= (0,\ 0,\ -2),
\end{aligned}
$$

tedy $P_u \times P_v$ je v bodě A opačně orientovaný než žádaný $\vec{n} = (0,0,1)$,

proto je orientace param. nesouhlasná.

vektorového pole $\mathbf{f}(x,y,z) = yz\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$

$$\iint_\sigma \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iint_\sigma (0, yz, z^2)\cdot d\vec{p} = -\iint_B \vec{f}(P(u,v))\cdot \overrightarrow{P_u \times P_v}\, du\, dv =$$

$$= -\int_{-1}^{1}\int_0^{\pi} (0, 2\cos v\cdot 2\sin v, 4\sin^2 v)\cdot(0, -2\cos v, -2\sin v)\, du\, dv =$$

$$= -\int_{-1}^{1}\int_0^{\pi} -8\cos^2 v\sin v - 8\sin^3 v\, du\, dv =$$

$$= +8\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\pi} \sin v(\cos^2 v + \sin^2 v)\, dv\right) du =$$

$$= +8\int_{-1}^{1}\left[-\cos v\right]_0^{\pi} du = 8\left[\underbrace{(1+1)}_{2}\cdot \cancel{v}\, u\right]_{-1}^{1} = \underline{\underline{32}}$$

Tok vekt. pole zadanou plochou je roven $+32$ [jednotek].

Určete tok Φ vektorového pole $\vec{f}$ plochou $Q \subset E_3$ orientovanou normálou $\vec{n}$:

***Příklad* 653.** $\vec{f} = (-y, x, z)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 ;\ z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2},\ 1 \leq z \leq 3\}$,
normálový vektor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ má $n_3 > 0$.

Př.: 653 (e-Sbírka)

$G: \ 1 \leq z \leq 3, \quad z = 4 - \sqrt{x^2+y^2} \ \rightarrow \ (z-4) = -\sqrt{x^2+y^2} \ \rightsquigarrow \ (z-4)^2 - x^2 - y^2 = 0$

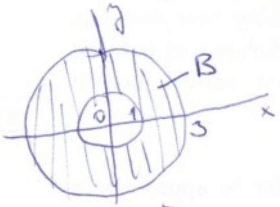
kuželová plocha

$1 \leq 4 - \sqrt{x^2+y^2} \leq 3$

$-3 \leq -\sqrt{} \leq -1$

$3 \geq \sqrt{x^2+y^2} \geq 1$

$\Rightarrow$ lze přes $P(u,v)$: $x = u$, $y = v$, $z = 4 - \sqrt{u^2+v^2}$ $\quad B =$



nebo lépe rovnou $P(r,\varphi)$: (abych lépe popsal B pomocí polárních souřadnic)

$x = r\cos\varphi$ $\qquad r \in \langle 1, 3 \rangle$

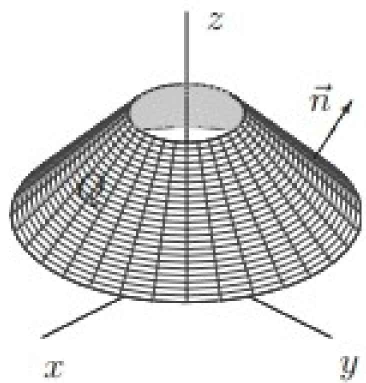
$y = r\sin\varphi$ $\qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$z = 4 - \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = 4 - r$

Pak

$P_r = \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 4-r) = (\cos\varphi, \sin\varphi, -1)$

$P_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi}(\text{—} \parallel \text{—}) = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)$



Pak

$$P_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 4-r\right) = \left(\cos\varphi, \sin\varphi, -1\right)$$

$$P_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\text{—}\,\|\,\text{——}\right) = \left(-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0\right)$$

$$P_r \times P_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & -1 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(+r\cos\varphi\right) - \vec{j}\left(-r\sin\varphi\right) + \vec{k}\left(r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi\right)$$

$$= \underline{\left(+r\cos\varphi, +r\sin\varphi, r\right)}$$

Má $P_r \times P_\varphi$ třetí složku kladnou?

Ano, ve všech bodech plochy je $r > 0$.

↳ souhlasná orientace $P(r,\varphi)$.

$\vec{f} = (-y, x, z)$,

$$\iint_{\sigma} \vec{f} \cdot d\vec{p} = + \iint_{B} \vec{f} \cdot \overrightarrow{P_r \times P_\varphi}\, dp =$$

$$= + \int_{1}^{3} \int_{0}^{2\pi} \left(\overset{-y}{-r\sin\varphi},\ \overset{x}{r\cos\varphi},\ \overset{z}{4-r} \right) \cdot \left(+r\cos\varphi,\ +r\sin\varphi,\ r \right) d\varphi\, dr$$

$$= \int_{1}^{3} \int_{0}^{2\pi} \cancel{-r^2 \sin\varphi\cos\varphi} + \cancel{r^2\cos\varphi\sin\varphi} + 4r - r^2 \, d\varphi\, dr =$$

$$= 2\pi \int_{1}^{3} 4r - r^2 \, dr = 2\pi \left[4\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_1^3 = 2\pi \left(2\cdot 9 - 9 - \left(2 - \frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$= 2\pi \left(7 + \frac{1}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{44\pi}{3}}}$$